

**БЪЛГАРСКА АКАДЕМИЯ НА НАУКИТЕ
ИНСТИТУТ ПО МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА**

Деветнадесети турнир Черноризец Храбър
1. ноември 2010 г.

Инструкция (11–12 клас)

1. Време за работа 90 минути.
2. Не се разрешава използване на калкулатори и друга изчислителна техника.
3. Към всяка задача са дадени 5 възможни отговора: А), Б), В), Г), Д). От тях точно един е верен.
4. В бланката срещу номера на всяка задача напишете верния според вас отговор, като използвате една от буквите: А, Б, В, Г, Д.
5. Пишете ясно и четливо с ГЛАВНИ ПЕЧАТНИ букви. Двусмислено попълнен или неясен отговор могат да се считат за грешен отговор. Ако не можете да намерите отговор, може да не попълвате отговор, т.е да оставите полето срещу номера на задачата празно.
6. Чертежите обикновено не са точни, а само изобразяват описаната в условието конфигурация.

Дават се следните точки:

- За верен отговор на всяка задача с номер от 1 до 10 включително – по 5 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 11 до 20 включително – по 7 точки.
- За верен отговор на всяка задача с номер от 21 до 30 включително – по 9 точки.
- За непопълнен отговор на задача – по 3 точки.
- За грешен отговор – 0 точки.

Задачите са предложени от Борислав Лазаров, Боянка Савова, Ивайло Кортезов и Йордан Табов.

Темата е съставена от Борислав Лазаров.

Деветнадесети турнир „Черноризец Храбър“

Състезателна тема за 11–12 клас

1. $\lg 2010 - \lg 201 =$

- A) 1 Б) 10 В) $\lg 1809$ Г) 10^{1809} Д) никое от тези

2. Колко ръба има призма с 2010 страни?

- A) 2010 Б) 2011 В) 2012 Г) 6030 Д) никое от тези

3. $\cos 2010^\circ =$

- A) $\frac{1}{2}$ Б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ В) $-\frac{1}{2}$ Г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Д) никое от тези

4. Намерете n , ако $4^{4n+1} = 8^{3n-1}$.

- A) 3 Б) 4 В) 5 Г) 6 Д) 7

5. Сборът на 2010 последователни естествени числа е винаги кратен на:

- A) 2 Б) 3 В) 7 Г) 11 Д) 13

6. Даден е триъгълник със страни 5, 12 и 13. Кое от числата

- A) $\sqrt{5}$ Б) π В) $\sqrt{20}$ Г) $2\frac{17}{8}$ Д) $3!$

е най-близо до дължината на радиуса на окръжността, която минава през средите на страните на триъгълника?

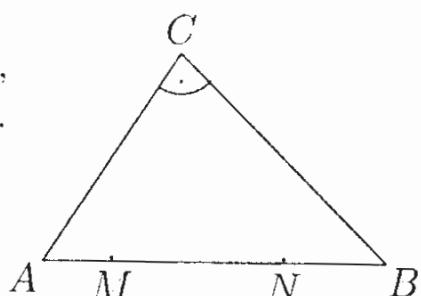
7. За колко числа $\alpha \in [-2010; 2010]$ е изпълнено равенството $\sin 2\alpha + 3 \cos \alpha = 4$?

- А) няма такива Б) между 1 и 200 В) между 201 и 400
Г) между 401 и 600 Д) повече от 600

8. На чертежа $\angle ACB = 90^\circ$,
 $AN = AC$, $BM = BC$ и $MN = 6$.

На колко е равно $AM \cdot BN$?

- А) 6 Б) 12 В) 18 Г) 24 Д) 36



9. Намерете сума от коефициентите в нормалния вид на многочлена

$$P(x) = (1 + x + x^2)(1 - x + x^2)^2(1 + x^2 + x^4)(1 - x^2 + x^4)^2.$$

- А) 6 Б) 7 В) 8 Г) 9 Д) никое от тези

10. В кой квадрант лежи пресечната точка на правите с уравнения $y = \pi x + \sqrt{2}$ и $y = \sqrt{2}x - \pi$?

- А) I Б) II В) III Г) IV Д) правите са успоредни

11. Хвърлят се зар и монета от 5 ст. Каква е вероятността точките от зара да са повече от числото, показвано от монетата? (Ако се е паднало тура, числото на монетата се счита за 0.)

- А) $\frac{7}{12}$ Б) $\frac{6}{12}$ В) $\frac{5}{12}$ Г) $\frac{4}{12}$ Д) $\frac{3}{12}$

12. Трапец с основи 4 и 9 се разделя от единия си диагонал на два подобни триъгълника. Каква е дължината на този диагонал?

- А) 5 Б) 6 В) 7 Г) 8
Д) не може да се определи еднозначно

13. Намерете уравнението на права, която минава през началото на координатната система и разделя на две равноличеви части $\triangle ABC$, чиито върхове са $A(1; 8)$, $B(3; 0)$ и $C(5; 10)$.

- А) $y = x$ Б) $y = \frac{1}{2}x$ В) $y = 2x$ Г) $y = \frac{3}{2}x$ Д) $y = \frac{2}{3}x$

14. Кои са последните три цифри на най-малкото естествено число, имащо точно 2010 естествени делители?

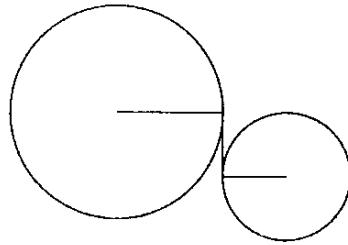
- А) 000 Б) 200 В) 400 Г) 600 Д) 800

15. Коя от цифрите

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 4 Д) 8

не може да бъде цифра на десетиците на числата 3^n , $n \in \mathbf{N}$?

16. На чертежа радиусите на двете окръжности са 7 и 5 и дължината на общата допирателна е 5. На колко е равен радиусът на най-малкия кръг, който може да покрие окръжностите?



- A) 15 Б) $12\frac{1}{2}$ В) 12 Г) $6\sqrt{5}$ Д) $5\sqrt{6}$

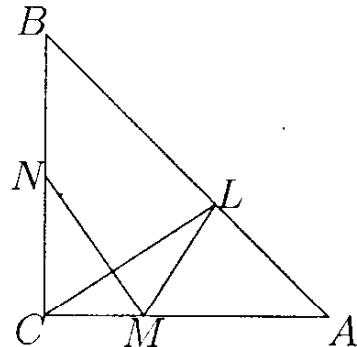
17. Намерете сбора от цифрите на квадратен корен от разликата $4444444444 - 88888$.

- А) 15 Б) 20 В) 25 Г) 30
Д) ∞ (този корен не е рационално число)

18. Даден е правоъгълен паралелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Равнината α не го пресича и е на разстояния 12, 14, 16 и 18 съответно от върховете A , B , D и A_1 . Колко е разстоянието от върха C_1 до α ?

- А) 17 Б) 19 В) 20 Г) 21 Д) никое от тези

19. От върха C на равнобедрения правоъгълен триъгълник ABC с катети $AC = BC = 10$ излиза лъч, който се отразява от AB в точка L , след това от AC в точка M и достига средата N на BC . На колко е равна дължината на начупената линия $CLMN$?



- А) 15 Б) $17\frac{1}{2}$ В) $11 + 10\sqrt{2}$ Г) $5\sqrt{13}$ Д) $10\sqrt{3}$

20. Да си мислим, че винаги когато е написана буквата x , тя може да се заменя с низове по някое от правилата:

$$(1) \ x \rightarrow 111x \quad (2) \ x \rightarrow 11111x \quad (3) \ x \rightarrow 111$$

Например

$$x \xrightarrow{(2)} 11111x \xrightarrow{(1)} 11111111x \xrightarrow{(3)} 1111111111.$$

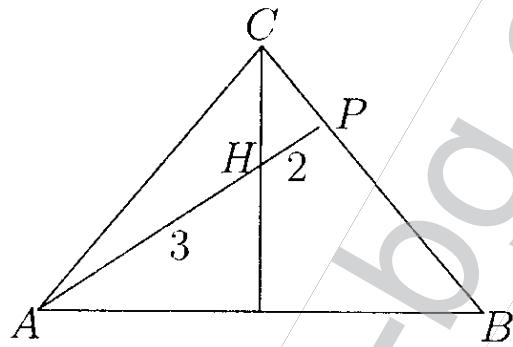
Колко са низовете от една или повече единици, които **не могат** да бъдат получени, стартирайки от буквата x ?

- А) 4 Б) 5 В) 6 Г) 7 Д) никое от тези

21. $\frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}}} =$

- А) $\sqrt{2} - 1$ Б) $\sqrt{3} - 1$ В) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ Г) $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$
Д) не може да се определи еднозначно

22. Точката H е ортоцентърът на равнобедренния $\triangle ABC$, $AC = BC$, а P е пресечната точка на правите AH и BC . На колко е равно лицето на $\triangle ABC$, ако $AH = 3$, $HP = 2$?



- А) $\frac{15\sqrt{5}}{2}$ Б) $\frac{10\sqrt{6}}{3}$ В) $\frac{12\sqrt{5}}{5}$ Г) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$ Д) никое от тези

23. Колко са простите числа p , за които числото $2^p + p^4$ също е просто?

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) повече от 3

24. За всеки ъгъл $\alpha \in (0; \pi)$ определяме функцията $\text{chord } \alpha$ като дължината на основата на равнобедрен триъгълник с бедра 1 и ъгъл α между бедрата. Ако $\text{chord } \alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha \in (0; \frac{\pi}{2})$, то на колко е равно $\text{chord}(\frac{\pi}{2} - \alpha)$?

- А) $\frac{\sqrt{3} - 1}{4}$ Б) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ В) $\frac{\sqrt{15} - 1}{4}$ Г) $\frac{\sqrt{18} - \sqrt{3}}{4}$
Д) никое от тези

25. Кое число ще бъде отпечатано след изпълнение на програмата

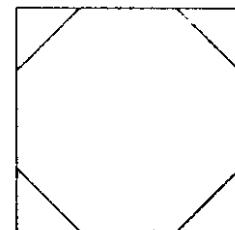
```
въведи a, въведи n, i:=1  
докато i<n прави  
    ако a е четно a:=a/2, иначе a:=3a+1  
    i:=i+1  
печат a
```

при въвеждане на $a=10$, $n=2010$?

- A) 8 B) 4 V) 2 Г) 1 Д) никое от тези

26. В квадрат със страна 2 е вписан правилен осмогълник. На колко е равно лицето на осмогълника?

- A) $4\sqrt{2}$ Б) $4(\sqrt{2}+1)$ В) $8(\sqrt{2}-1)$ Г) $8-2\sqrt{2}$
Д) никое от тези

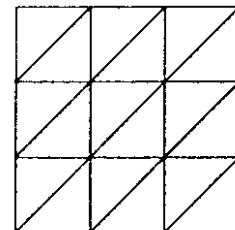


27. При хвърляне на два зара P и Q се падат съответно точки p и q . Вероятността уравнението $x^2 + px + q = 0$ да има два различни реални корена е число от интервала:

- A) $(0, 4; 0, 45)$ Б) $(0, 45; 0, 5)$ В) $(0, 5; 0, 55)$
Г) $(0, 55; 0, 6)$ Д) $(0, 6; 0, 65)$

28. По колко различни маршрута, съставени от 5 отсечки (независимо дали са хоризонтални, вертикални или диагонални), може да се стигне от левия долн до десния горен ъгъл на схемата?

- A) не повече от 15 Б) между 16 и 25 В) между 26 и 35
Г) между 36 и 45 Д) повече от 45



29. Едно число ще наричаме *сумарно*, ако е едновременно сума на две последователни естествени числа и сума на три последователни естествени числа. Относно коя операция множеството на сумарните числа е затворено, т.е. резултатът от операцията на всеки две сумарни числа е също сумарно число?

- А) събиране Б) изваждане В) умножение Г) деление
Д) никоя от тези

30. Какво ще се отпечати в резултат от изпълнението на следния програмен фрагмент:

```
i:=1; j:=1; s:=0;  
докато i<100 изпълнявай {s:=s+i*j; i:=i+1; j=j*i}  
отпечати(s-j);
```

- А) 0 Б) 1 В) 100 Г) 9900 Д) друго