МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ

Примерни решения на задачите

ЛОВЕЧ – 2010

ОСМИ КЛАС

8.1. Дадено е уравнението $x^2-3ax+2a^2+a-1=0$, където a е реален параметър.

а) Да се реши уравнението в зависимост от стойностите на параметъра *a*.

б) Да се намерят стойностите на a, за които уравнението има два различни реални корена такива, че по-малкият корен е по-малък от -3, а по-големият е по-голям от -1.

Решение.

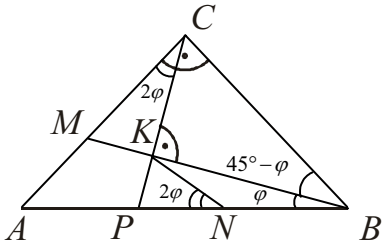
а) Дискриминантата на уравнението е $D=9a^2-8a^2-4a+4=(a-2)^2$, откъдето получаваме решенията на уравнението $x_1=2a-1$ и $x_2=a+1$.

б) Тъй като $x_1=2a-1$ и $x_2=a+1$, то $x_1\neq x_2$ при $a\neq 2$. Ако $a<2$, то $x_1<x_2$ и за да бъде изпълнено условието на задачата трябва $\left|\begin{array}{l}2a-1<-3\\ a+1>-1\end{array}\right.$, т.е. $a\in(-2;-1)$. Ако $a>2$, то $x_1>x_2$ и за да бъде изпълнено условието на задачата трябва $\left|\begin{array}{l}2a-1>-1\\ a+1<-3\end{array}\right.$. Тъй като последната система няма решение, окончателно имаме $a\in(-2;-1)$.

8.2. Даден е равнобедрен правоъгълен триъгълник *ABC* с хипотенуза *AB*. Точките *M* и *P* съответно от страните *AC* и *AB* са такива, че $CP\perp BM$.

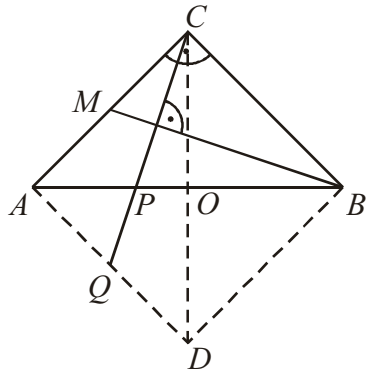
а) Ако *N* е средата на *PB*, $CP\cap BM=K$ и $\sphericalangle MCP=\sphericalangle KNP$, да се намери $\sphericalangle MBC$.

б) Ако *M* е средата на *AC,* да се намери отношението $AP:PB$.



Решение.

а) Тъй като *KN* е медиана в $\triangle KBP$, то $KN=NB$ и $\sphericalangle NKB=\sphericalangle KBN=\varphi$. Тогава $\sphericalangle MBC=45^\circ-\varphi$ и $\sphericalangle MCK=\sphericalangle KNP=2\varphi$. Но $\triangle MBC$ е правоъгълен и $CK\perp MB$ откъдето $\sphericalangle MCK=\sphericalangle MBC$, т.е. $2\varphi=45^\circ-\varphi$, откъдето намираме $\varphi=15^\circ$. Следователно $\sphericalangle MBC=30^\circ$.



б) Построяваме квадрат *ADBC*. Нека $CP\cap AD=Q$. Тогава от $CP\perp BM$ следва $\sphericalangle PCB=90^\circ-\sphericalangle MBC$. От $\sphericalangle ACB=90^\circ\Rightarrow\sphericalangle ACQ=90^\circ-\sphericalangle PCB=\sphericalangle MBC$. Така получаваме $\triangle MBC\cong\triangle QCA$ (II пр.), откъдето $AQ=CM$. Следователно *Q* е средата на *AD* и *CQ* е медиана в $\triangle ACD$.
Тъй като *ADBC* е квадрат, то *AO* е медиана и *P* е медицентърът на $\triangle ACD$. Оттук $AP:PO=2:1$. Тъй като $AO=OB$, то $PB=AO+OP$. Следователно $AP:PB=1:2$.

8.3. За участие в тенис турнир се записали 18 тенисисти. Според правилата в тениса, на всеки участник бил даден номер в листата в зависимост от предишни постижения: № 1 – на най-именития, № 2 – на следващия по успехи, и т.н. до № 18. В първия кръг всички 18 тенисисти били разпределени с жребий в 9 двойки. Записвайки номерата на противниците във всеки от 9-те мача, секретарят на турнира забелязал, че във всяка двойка сборът от номерата на двамата противници е равен на квадрата на някакво естествено число.

а) Кой пореден номер има тенисистът, който е попаднал в една двойка с тенисист № 1?

б) Ден преди турнира заявил участие още един тенисист – той бил записан под № 19. Бил теглен втори жребий – първо се оказало, че първия кръг пропуска тенисист № 1; и второ: при разпределението на останалите състезатели за този кръг отново се получило във всяка от 9-те двойки сборът на номерата на противниците да е квадрат на естествено число. Вярно ли е, че при втория жребий четири от двойките противници не са променили състава си, определен при първия жребий?

Решение. Да означим с a и b номерата на двама тенисисти в една двойка, а самата двойка – $(a; b)$.

а) Според условието за № 1 са възможни три случая – (1; 3), (1; 8) и (1; 15). Тъй като за № 17 е възможна само една двойка – (17; 8), то случая (1; 8) е невъзможен. Нека съществува двойката (1; 3). Тогава за № 6 остава само възможна само двойката (6; 10). Но и за № 15 остава само възможността (15; 10). Така № 10 попадна в две двойки, което противоречи на условието. Следователно при първия жребий № 15 е попаднал в една двойка с № 1.

Остана да покажем, че в тази ситуация съществува разделяне по двойки на номерата на тенисистите: (1; 15), (2; 14), (3; 13), (4; 12), (5; 11), (6; 10), (7; 18), (8; 17), (9; 16).

б) Непосредствено се съобразява, че за последните 5 номера в новата листа има само по една възможност за съставяне на двойки: (15; 10), (16; 9), (17; 8), (18; 7) и (19; 6). Тъй като двойките (3; 1) и (3; 6) са невъзможни, то за № 3 остава единствен противник да е № 13. Тогава от възможностите (12; 4) и (12; 13) остава само първата. Ако № 14 играе с №11, то остава № 2 да се срещне с № 5, но 2 + 5 не е точен квадрат. И така, останалите четири двойки са: (2; 14), (3; 13), (4; 12) и (5; 11).

С аналогични разсъждения достигаме до извода, че показаното в а) разпределяне по двойки е единствено. Но то също съдържа двойките (2; 14), (3; 13), (4; 12) и (5; 11). Следователно в четири от двойките при двата жребия не са променени номерата на противниците.

ДЕВЕТИ КЛАС

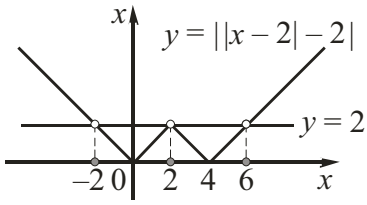
9.1. Дадено е уравнението $\left||x-2|-2\right|=a$, където a е реален параметър.

а) Да се реши уравнението при $a=2$.

б) Да се намерят решенията на уравнението в зависимост от стойностите на параметъра a.

Решение. а) Ако $x<2$, то $|x-2|=2-x$ и за уравнението $\left||x-2|-2\right|=2$ получаваме $\left||x-2|-2\right|=2 \Leftrightarrow |2-x-2|=2 \Leftrightarrow |x|=2$. Решението е $x_1=-2$.

Ако $x\geq 2$, то $|x-2|=x-2$ и за уравнението $\left||x-2|-2\right|=2$ получаваме $\left||x-2|-2\right|=2 \Leftrightarrow |x-2-2|=2 \Leftrightarrow |x-4|=2$. Решенията са $x_2=2$ и $x_3=6$. На чертежа са показани решенията на уравнението.



б) Уравнението има решение при $a\geq 0$.

Ако $x<2$, то $|x-2|=2-x$ и за уравнението получаваме $\left||x-2|-2\right|=a \Leftrightarrow |2-x-2|=a \Leftrightarrow |x|=a$.

При $x<0$ решението е $x_1=-a$, при $0\leq x<2$, решението е $x_2=a\,(a<2)$.

Ако $x \geq 2$, то $|x-2| = x-2$ и за уравнението получаваме

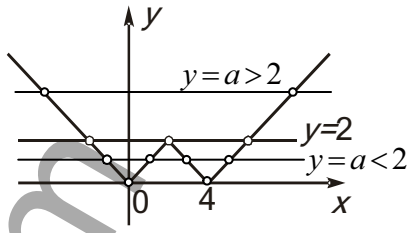
$\big||x-2|-2\big| = a \Leftrightarrow |x-2-2| = a \Leftrightarrow |x-4| = a.$

При $2 \leq x < 4$, $|x-4| = a \Leftrightarrow 4-x = a \Rightarrow x_3 = 4-a\,(a<2)$;

При $4 \leq x$, $|x-4| = a \Leftrightarrow x-4 = a \Rightarrow x_4 = a+4.$

Окончателно за решенията на уравнението $\big||x-2|-2\big| = a$ имаме:

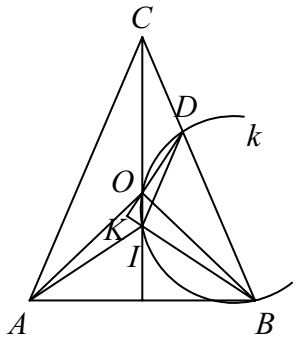
- при $a<0$ уравнението няма решение;
- при $a=0$ решенията са $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$;
- при $0<a<2$ решенията са $x_1 = -a$, $x_2 = a$, $x_3 = 4-a$ и $x_4 = a+4$;
- при $a=2$ решенията са $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ и $x_3 = 6$;
- при $a>2$ решенията са $x_1 = -a$ и $x_2 = a+4$.



9.2. Даден е равнобедрен остроъгълен триъгълник $\triangle ABC$ ($AC = BC$), за който $\sphericalangle ACB < 60^0$. Точките I и O са съответно центърът на вписаната в триъгълника окръжност и центърът на описаната около триъгълника окръжност. Описаната около $\triangle BIO$ окръжност пресича втори път страната BC в точка D.

а) Да се докаже, че правата DI е успоредна на правата AC.

б) Да се намери големината на ъгъла между правите DO и BI.



Решение. Означаваме $\sphericalangle CAB = \sphericalangle CBA = \alpha$. От $\sphericalangle ACB < 60^0$ следва, че $\alpha > 60^0$. Пресмятаме $\sphericalangle AOB = 2\sphericalangle ACB = 360^0 - 4\alpha$ и $\sphericalangle AIB = 180^0 - \frac{1}{2}\left(\sphericalangle CAB + \sphericalangle CBA\right) = 180^0 - \alpha$. От $\alpha > 60^0$ следва, че $\sphericalangle AOB < \sphericalangle AIB$, т.е. точката O е между точките C и I.

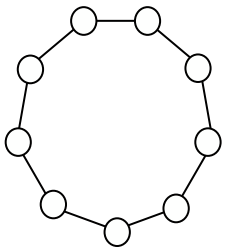
а) От това, че четириъгълникът $BIOD$ е вписан в окръжност следва, че $\sphericalangle IDB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BI} = \sphericalangle BOI = \frac{1}{2}\sphericalangle AOB = \sphericalangle ACB$. Следователно правата DI е успоредна на правата AC.

б) Нека правите DO и BI се пресичат в точка K. Тогава $\sphericalangle KDB = \sphericalangle KDI + \sphericalangle IDB$. Но $\sphericalangle KDI = \frac{1}{2}\overset{\frown}{OI} = \sphericalangle OBI = \sphericalangle OBA - \sphericalangle IBA = 2\alpha - 90^0 - \frac{\alpha}{2} =$

$= \frac{3\alpha}{2} - 90^0$. Тогава $\sphericalangle KDB = \frac{3\alpha}{2} - 90^0 + 180^0 - 2\alpha = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$.

Следователно $\sphericalangle DKB = 180^0 - \sphericalangle KDB - \sphericalangle KBD = 90^0 - \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90^0$.

9.3. а) Във всеки от върховете на деветоъгълника вдясно запишете някоя от цифрите 1, 2 или 3 така, че което и двуцифрено число, съставено от тези цифри да изберем (цифрите могат де не са различни), ще намерим два съседни върха на деветоъгълника, в които по посока на часовниковата стрелка е записано избраното число.



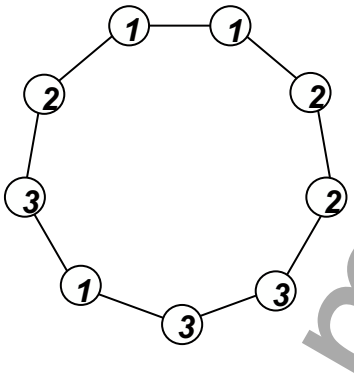
б) Във всеки от върховете на многоъгълник е написана една от цифрите 1, 2 или 3. Известно е, че за всяко трицифрено число, съставено от тези цифри (цифрите могат да се повтарят) могат да се намерят три съседни върха, в които по посока на часовниковата стрелка е записано избраното число.

Колко най-малко върха може да има този многоъгълник? Дайте пример за такова разположение на цифрите.

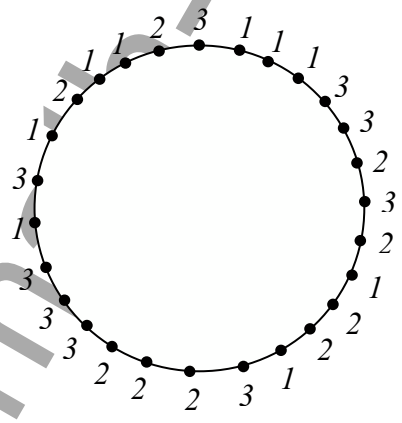
Решение. а) Всички числа, които можем да съставим с цифри 1, 2 или 3, са 11, 12, 13, 22, 21, 23, 33, 31 и 32. Оттук следва, че трябва да разположим 3 единици, 3 двойки и 3 тройки (колкото са десетиците на деветте числа), като си осигурим три двойки съседни върха с еднакви цифри. Вписваме в два съседни върха 1 и 1. Нека в съседните им върхове има еднакви цифри – например 2, с което в четири върха си гарантирахме общо 3 от числата (21, 11 и 12). Третата двойка трябва да запишем непосредствено до една от двойките. Без ограничение нека да е в съседния по посока на часовниковата стрелка връх (образувахме числото 22). Ако следващото в тази посока число е 1, то ще повторим числото 21, което означава, че за някое от останалите числа няма да има място. Следователно в шестия връх трябва да има 3 (числото 23). Останаха 2 тройки и 1 единица. Едната тройка очевидно трябва да запишем преди първата двойка (в деветия връх) заради числото 32. Разположението на числата 1 и 3 в седмия и осмия връх е без значение – винаги получаваме числата 33, 13 и 31. Сега да отбележим, че ако направим пълна замяна на цифрите: 1→2; 2→3 и 3→1 в деветте числа, ще получим пак същите числа, т.е. описаният алгоритъм дава решения, при които двете 1-ци са заградени от различни цифри – в единия случай 2 и 3 по посока на часовниковата стрелка, а в другия 3 и 2 с същата посока. Замяната само на цифрата 2 с 3 и на 3 с 2 пък дава решението, при което двете единици са оградени от две тройки.

Едно решение е дадено на фиг. 1.

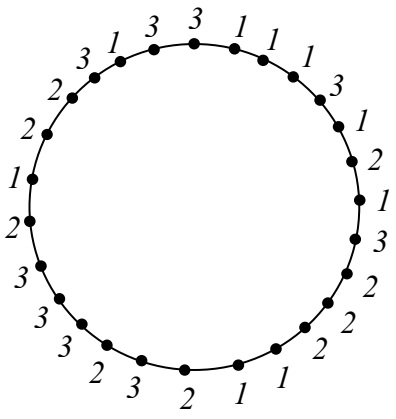
б) Първо ще намерим колко трицифрени числа можем да запишем като използваме само цифрите 1, 2 или 3. Във всеки от разрядите можем да поставим всяка от трите цифри (цифрите могат да се повтарят) – така броят им е 3.3.3 = 27. Тъй като числата са различни и четем само в една посока, то всяка цифра във връх на многоъгълника е първата цифра на някое от тях. Следователно многоъгълника има най-малко 27 върха.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Тъй като имаме три числа с три еднакви цифри, трябва да разположим три тройки еднакви цифри (съответно с цифрите 1, 2 и 3) в съседни върхове. Аналогично, за числата, които съдържат две еднакви последователни цифри са ни необходими поне още три двойки съседни върха. На следващия ход е необходимо да съобразим кои да са цифрите в съседните на тези групи върхове, така че да изчерпим 12-те числа с две еднакви последователни цифри. Така, ако тройката единици е заградена например от две 3-ки, то двойката единици не трябва да е заградена също от две 3-ки, а от две 2-ки. Също така, двойките и тройките еднакви цифри не трябва да са заградени от две различни цифри в една и съща последователност. Една такава „верига” върху 17 от върховете е: – 2 – 1– 1

– 1 – 3 – 3 – 3 – 2 – 2 – 3 – 3 – 1 – 1 – 2 – 2 – 2 –1 –. Сега вече не е трудно да разположим останалите 10 цифри, за да получим 6 числа с различни цифри и 6 числа с равни цифри на десетиците и единиците. След последната единица, ако поставим 2, една от „веригите”, които можем да получим е: (2 – 1) – 2 – 3 – 2 – 1 – 3 – 1– 3 – 2 – 3 –1 – (2 – 1); а ако поставим 3, можем да подредим числата така: (2 –1) – 3 – 1 – 3 – 2 – 1 – 2 – 3 – 2 – 3 – 1 – (2 – 1).

На фиг. 2 и фиг. 3 са дадени още две разположения, които отговарят на условието.

ДЕСЕТИ КЛАС

10.1. а) Да се реши системата уравнения $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+y^2+10x-18y+6=0 \end{cases}$.

б) Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които системата $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0 \\ x^2+y^2+10x-18y+a\le 0 \end{cases}$ има единствено решение.

Решение. а) Тъй като $x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y)=0$, то $x=y$ или $x=2y$. Тогава за второто уравнение имаме $2y^2-8y+6=0$ или $5y^2+2y+6=0$. Решенията на първото уравнение са $y_1=1$ и $y_2=3$, а второто няма решение. Следователно системата има две решения $x_1=y_1=1$ и $x_2=y_2=3$.

б) От $x^2-3xy+2y^2=0$ получаваме $x=y$ или $x=2y$. При $x=y$ неравенството в системата е еквивалентно на $2y^2-8y+a\le 0$, а при $x=2y$ на $5y^2+2y+a\le 0$. За всяко решение на едно от неравенствата получаваме решение на първоначалната система. Следователно, за да има системата единствено решение е необходимо и достатъчно едно от двете неравенства да има единствено решение, а другото да няма решение, или и двете неравенства имат едно и също единствено решение. Неравенството $2y^2-8y+a\le 0$ има единствено решение точно, когато неговата дискриминанта $D_1=16-2a=0$, т.е. при $a=8$. При $a=8$ неравенството $5y^2+2y+8\le 0$ няма реални решения и следователно първоначалната система има единствено решение $x=y=2$. Неравенството $5y^2+2y+a\le 0$ има единствено решение точно, когато неговата дискриминанта $D_2=1-5a=0$, т.е. при $a=\frac{1}{5}$. При $a=\frac{1}{5}$ неравенството $2y^2-8y+\frac{1}{5}\le 0$ има безброй много реални решения и следователно първоначалната система има безброй много решения. Окончателно системата има единствено решение при $a=8$.

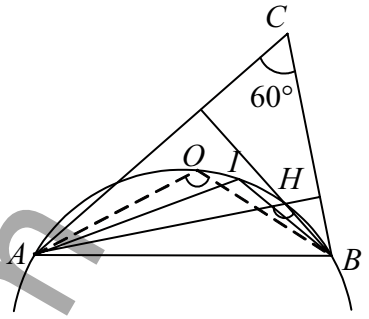
10.2. Даден е остроъгълен $\triangle ABC$. Центърът на вписаната в триъгълника окръжност, центърът на описаната около триъгълника окръжност и върховете *A* и *B* лежат на окръжност *k*.

а) Да се намери мярката на $\sphericalangle ACB$ и да се докаже, че ортоцентърът на $\triangle ABC$ лежи на k.

б) Ако медицентърът на триъгълника лежи на k, да се намерят мерките на ъглите на $\triangle ABC$.

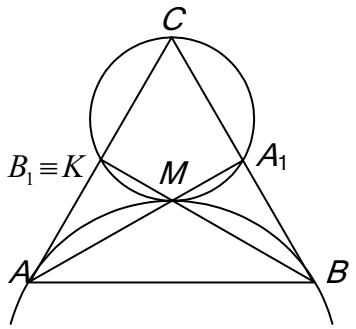
Решение. Означаваме с O центърът на описаната около триъгълника окръжност, с I центърът на вписаната в триъгълника окръжност, $\sphericalangle CAB = \alpha$, $\sphericalangle CBA = \beta$ и $\sphericalangle ACB = \gamma$.

а) Пресмятаме, че $\sphericalangle AIB = 180° - \sphericalangle IAB - \sphericalangle ABI = 90° + \frac{\gamma}{2}$ и $\sphericalangle AOB = 2\gamma$. Тъй като $\sphericalangle AIB = \sphericalangle AOB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ следва, че $90° + \frac{\gamma}{2} = 2\gamma$, т.е. $\gamma = 60°$. Ако H е ортоцентърът на $\triangle ABC$, то $\sphericalangle AHB = 180° - \sphericalangle HAB - \sphericalangle ABH = \alpha + \beta = 120°$.



Следователно отсечката AB се вижда от един и същи ъгъл от точките O и H, т.е. точката H лежи на k.

б) Ако M е медицентърът на $\triangle ABC$, от условието следва, че $\sphericalangle AMB = \sphericalangle AOB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = 120°$. Нека медианите през върховете A и B пресичат страните BC и AC на $\triangle ABC$ съответно в точки A_1 и B_1. От $\sphericalangle ACB + \sphericalangle AMB = 60° + 120° = 180°$ следва, че четириъгълникът $\triangle B_1MA_1C$ е вписан в окръжност. Тогава $\triangle BB_1C \sim \triangle BA_1M$ ($\sphericalangle BB_1C = \sphericalangle BA_1M, \sphericalangle BCB_1 = \sphericalangle BMA_1$), откъдето $\frac{BC}{BM} = \frac{BB_1}{BA_1}$



Следователно $BM.BB_1 = BA_1.BC$. Тъй като M е медицентър на $\triangle ABC$, а точката B_1 е средата на страната AC, то $\frac{2}{3}BB_1^2 = \frac{1}{2}BC^2$, т.е. $BB_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$. Ако BK е височината в $\triangle ABC$, от правоъгълния $\triangle BKC$ получаваме $BK = BC.\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}BC$. Следователно $BK = BB_1$, т.е. $\triangle ABC$ е равнобедрен ($BA = BC$), и от подусловие а) следва, че $\triangle ABC$ е равностранен.

10.3. а) Дванадесет топки са номерирани с числата от 1 до 12. Топките са разпределени в няколко кутии така, че във всяка кутия най-големият номер е равен на сбора на номерата на останалите топки в тази кутия. В колко кутии са разпределени топките? По колко различни начина може да стане това?

б) Възможно ли е, ако премахнем топката с номер 12, останалите 11 топки отново да могат да се разпределят в кутии така, че във всяка кутия най-големият номер да е равен на сбора на номерата на останалите топки в същата кутия?

Решение. Тъй като във всяка кутия топките имат различни номера, като най-големият от тях е равен на сбора на останалите номера, то във всяка кутия трябва да има поне 3 топки. Следователно броят на кутиите е най-много 4 в първия случай и най-много 3, ако топките са по-малко от 12.

Нека кутиите са n. Да означим с A_i най-големия номер в i-тата кутия ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогава сборът $A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ е равен на сбора на номерата на всички останали топки, т.е. е половината от сбора на всички номера.

а) От $2(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 + 2 + \ldots + 12 = 78$ получаваме $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = 39$. Ако $n = 3$, то възможния най-голям сбор е $A_1 + A_2 + A_3 = 12 + 11 + 10 < 39$. Следователно броят на кутиите е 4 и всяка съдържа точно 3 топки. Тъй като номера 12 и 6 не могат да бъдат в една кутия, то възможните комбинации за 12 са с номера 11, 10, 9, 8 и 7. От друга страна възможните представяния на 39 като сбор от 4 събираеми, най-голямото

от които е 12 са: 12+10+ 9 + 8; 12 + 11 + 10 + 6; 12 + 11 + 9 + 7. Сега вече лесно се изчерпват възможните комбинации. Има точно 8 възможности за разпределение на 12-те топки:

(1) {12, 11, 1}, {10, 7, 3}, {9, 5, 4}, {8, 6, 2}
(2) {12, 11, 1}, {10, 6, 4}, {9, 7, 2}, {8, 5, 3}
(3) {12, 10, 2}, {11, 8, 3}, {9, 5, 4}, {7, 6, 1}
(4) {12, 10, 2}, {11, 6, 5}, {9, 8, 1}, {7, 4, 3}
(5) {12, 9, 3}, {11, 7, 4}, {10, 8, 2}, {6, 5, 1}
(6) {12, 8, 4}, {11, 9, 2}, {10, 7, 3}, {6, 5, 1}
(7) {12, 8, 4}, {11, 10, 1}, {9, 6, 3}, {7, 5, 2}
(8) {12, 7, 5}, {11, 8, 3}, {10, 9, 1}, {6, 4, 2}

б) От $2(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 + 2 + ... + 11= 66$ получаваме $A_1 + A_2 + ... + A_n = 33$. Тъй като $n \le 3$ и в едната кутия е номер 11, а в другите са топки с номер, по-малък от 11, то $A_1 + A_2 + ... + A_n < 3.11 = 33$. Полученото противоречие показва, че исканото разпределение на 11 топки е невъзможно.

ЕДИНАДЕСЕТИ КЛАС

11.1. Дадено е уравнението $2^x - \frac{a+3}{2^x-3} = a+1$, където a е реален параметър.

а) Да се реши уравнението при $a = 3$.

б) Да се намерят стойностите на параметъра a, при които уравнението има два положителни корена.

Решение. Полагаме $2^x = y, y > 0, y \ne 3$.

а) При $a = 3$ уравнението приема вида $y - \frac{6}{y-3} = 4$ и получаваме квадратното уравнение $y^2 - 7y + 6 = 0$ с корени $y_1 = 6$ и $y_2 = 1$. Следователно $2^x = 6$ или $2^x = 1$. Окончателно $x_1 = \log_2 6$ и $x_2 = \log_2 1 = 0$.

б) При $x > 0$, $2^x > 2^0 = 1$. Тогава уравнението има два положителни корена, когато уравнението $f(y) = y^2 - (4+a)y + 2a = 0$ има два корена, по-големи от 1. Тогава за корените y_1 и y_2 е изпълнено $1 < y_1 \le y_2$. Условието $1 < y_1 \le y_2$ е еквивалентно на $\begin{cases} D \ge 0 \\ \frac{y_1+y_2}{2} > 1 \\ f(1) > 0 \end{cases}$. Имаме $D = (4+a)^2 - 8a = 16 + a^2 > 0$. От $f(1) = -3 + a > 0 \Rightarrow a > 3$. От $\frac{y_1+y_2}{2} = \frac{4+a}{2} > 1 \Leftrightarrow 4 + a > 2 \Rightarrow a > -2$. Следователно $a > 3$. Като вземем предвид, че $y = 2^x = 3$ при $f(3) = -a - 3 = 0$, т.е. при $a = -3$, получаваме окончателно, че уравнението има два положителни корена при $a \in (3; +\infty)$.

11.2. Даден е квадрат $ABCD$. Върху страните BC и CD са избрани точки Q и P такива, че $\triangle AQP$ е равностранен. Права l през точката P, перпендикулярна на правата AQ, пресича страната AB в точка E.

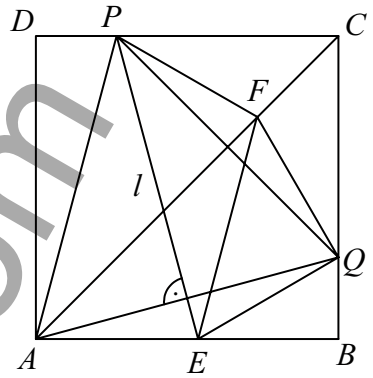
а) Да се намерят мерките на ъглите на $\triangle AQE$.

б) Вътре в $\triangle PQC$ е избрана точка F такава, че $\triangle PFQ \cong \triangle AEQ$. Да се намери дължината на отсечката FC, ако $EF = 2$.

Решение.

а) От $AD = AB$ и $AP = AQ$ следва, че $\triangle ADP \cong \triangle ABQ$ и $\sphericalangle DAP = \sphericalangle QAB = 15°$. От това, че $\triangle AQP$ е равностранен следва, е правата l е симетрала на AQ и $\triangle AQE$ е равнобедрен ($AE = EQ$). Следователно $\sphericalangle QAE = \sphericalangle AQE = 15°$ и $\sphericalangle AEQ = 150°$.

б) От а) и $\triangle PFQ \cong \triangle AEQ$ следва, че точката F лежи на ъглополовящата на $\sphericalangle PCQ$, т.е. на диагонала AC на квадрата $ABCD$. Тогава $\sphericalangle FQE = \sphericalangle FQP + \sphericalangle PQE + \sphericalangle AQE = 15° + 60° + 15° = 90°$ и от $\triangle PFQ \cong \triangle AEQ$ имаме, че $FQ = QE$, т.е. $\triangle FQE$ равнобедрен правоъгълен триъгълник и следователно $FQ = \frac{EF}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. От $\triangle ADP \cong \triangle ABQ$ следва, че $CP = CQ$, т.е. $\triangle PCQ$ е равнобедрен правоъгълен триъгълник и следователно $\sphericalangle FQC = \sphericalangle PQC - \sphericalangle PQF = 45° - 15° = 30°$. От синусовата теорема за $\triangle FQC$ получаваме $\frac{FQ}{\sin 45°} = \frac{FC}{\sin 30°}$, т.е. $FC = 1$.



11.3. В квадратната таблица вдясно са попълнени четири числа.

а) Да се попълнят празните клетки в таблицата така, че числата във всеки стълб и във всеки ред да образуват геометрична прогресия. По колко различни начина може да стане това?

б) Нека таблицата е попълнена според условието в подточка а). Каква е вероятността случайно избрано число от нея да бъде точен квадрат на цяло число?

			8
	6		
		36	
27			

Решение. а) Да означим с a числото в лявата горна ъглова клетка (фиг. 1). То участва в геометрични прогресии с всяко от числата 8 и 27, т.е. имаме прогресиите $a, aq, aq^2, aq^3 = 8$ и $a, aq_1, aq_1^2, aq_1^3 = 27$. За отношението на частните на двете прогресии получаваме $\frac{q^3}{q_1^3} = \frac{8}{27} \Rightarrow \frac{q}{q_1} = \frac{2}{3}$. Тогава $q = 2k$, $q_1 = 3k$ и $a = \frac{1}{k^3}$. Изразяваме числата в първия ред и в първия стълб чрез k, както е показано на таблицата. Ще изразим чрез k числото x, което стои в клетката на втори ред и трети стълб. То участва в две прогресии и от свойството на геометричната прогресия за него са изпълнени условията: $6^2 = \frac{3}{k^2}.x$ и $x^2 = \frac{4}{k}.36$. От тези равенства получаваме $k^5 = 1$ или $k = 1$. Следователно $a = 1$ и $x = 12$, с което се определят членовете на геометричните прогресии в първи и трети стълб и в първи и втори ред. Непосредствено се вижда, че те определят еднозначно и останалите числа в таблицата (останалите членове на другите геометрични прогресии) (фиг. 2).

$a = \frac{1}{k^3}$	$\frac{2}{k^2}$	$\frac{4}{k}$	8
$\frac{3}{k^2}$	6	x	
$\frac{9}{k}$		36	
27			

Фиг. 1

1	2	4	8
3	6	12	24
9	18	36	72
27	54	108	216

Фиг. 2

б) От решението на а) – фиг. 2. следва, че сред 16-те възможни числа за избор има четири квадрата на цели числа – 1, 4, 9 и 36. Следователно вероятността да изберем квадрат е 4:16 = 0,25.

ДВАНАДЕСЕТИ КЛАС

12.1. Числата $1-\cos 2x$, $\cos x-\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}\sin^{-2} x$ са съответно k, $k+1$ и $k+2$ членове на геометрична прогресия.

а) Да се намери частното на геометричната прогресия.

б) Да се намери k, ако петнадесетият член на тази прогресия е равен на $\frac{27}{8}$.

Решение.

а) Нека $b_k=1-\cos 2x=2\sin^2 x$, $b_{k+1}=\cos x-\frac{1}{2}$ и $b_{k+2}=\frac{1}{2\sin^2 x}$, $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ са последователните членове на геометричната прогресия. От равенството $b_{k+1}^2=b_k b_{k+2}$ получаваме $\left(\cos x-\frac{1}{2}\right)^2=1$. Следователно $\cos x=-\frac{1}{2}$. Ако означим с q частното на геометричната прогресия, то от равенството $q=\frac{b_{k+1}}{b_k}$, получаваме, че $q=-\frac{2}{3}$.

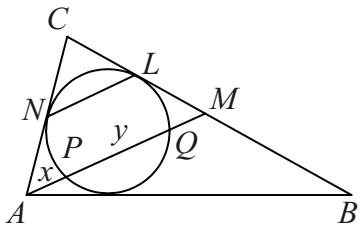
б) Нека b_1 е първият член на геометричната прогресия. Тъй като $b_{k+1}=-1$, то от равенството $b_{k+1}=b_1 q^k$ получаваме, че $b_1=-\left(-\frac{3}{2}\right)^k$. По условие $b_{15}=\frac{27}{8}$, откъдето $\frac{27}{8}=-\left(-\frac{3}{2}\right)^k\left(-\frac{2}{3}\right)^{14}$ или $\left(-\frac{3}{2}\right)^3=\left(-\frac{3}{2}\right)^{k-14}$, откъдето $3=k-14$. Следователно $k=17$.

12.2. Даден е триъгълник ABC със страна $AC=1$. Вписаната в триъгълника окръжност k се допира до страните AC и BC, съответно в точки N и L. Точката M е средата на страната BC, $AM \parallel NL$ и AM пресича окръжността k в точки P и Q, като P е между A и Q.

а) Да се намери дължината на страната BC и да се докаже, че $AP=MQ$.

б) Да се намери дължината на страната AB, при която дължината на отсечката PQ е най-голяма.

Решение.



а) От $AM \parallel NL$ по теоремата на Талес имаме $\frac{CA}{CN}=\frac{CM}{CL}$. Но $CN=CL$ така, че $CA=CM=1$. Тогава $CB=2CM=2$ и $AN=ML$. От теоремата за допирателна и секуща имаме $AN^2=AP.AQ=AP\left(AP+PQ\right)$ и $ML^2=MQ.MP=MQ\left(MQ+PQ\right)$. Но $AN=ML$, откъдето $AP^2-MQ^2+\left(AP-MQ\right)PQ=0$ или $\left(AP-MQ\right)AM=0$. Следователно $AP=MQ$.

б) Ако означим $AP = MQ = x$ и $PQ = y$ получаваме системата $\begin{vmatrix} x(x+y) = AN^2 \\ 2x + y = AM \end{vmatrix}$. Оттук $x = \frac{AM - y}{2}$, $\frac{AM - y}{2}\left(\frac{AM - y}{2} + y\right) = AN^2$ или $AM^2 - y^2 = 4AN^2$ откъдето $y = \sqrt{AM^2 - 4AN^2}$.

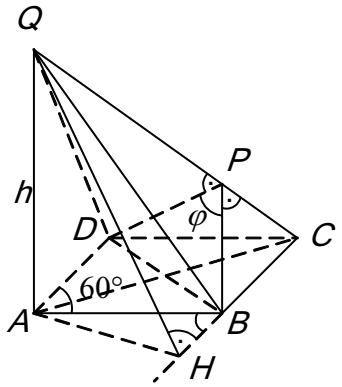
Нека $AB + BC + CA = 2p$ и $AB = t$. Тогава $2p = 3 + t$, $AN = p - BC = \frac{t-1}{2}$ и $AM^2 = \frac{1}{4}\left(2\left(AB^2 + AC^2\right) - BC^2\right) = \frac{t^2 - 1}{2}$.

Следователно $PQ = y = \sqrt{\frac{t^2-1}{2} - (t-1)^2} = \sqrt{\frac{-t^2 + 4t - 3}{2}}$. Ако $f(t) = -t^2 + 4t - 3$, то PQ е най-голямо, когато $f(t)$ е най-голямо. Но $f(t)_{\max} = f(2)$ и тъй като от неравенството на триъгълника имаме $BC - AC < AB < AC + BC$, т.е. $1 < t < 3$, то дължината на страната AB, при която дължината на отсечката PQ е най-голяма, е 2.

12.3. Основата $ABCD$ на пирамидата $ABCDQ$ е ромб със страна 2. Околните стени ABQ и ADQ са перпендикулярни на равнината на основата и сключват двустенен ъгъл, равен на $60°$. Лицето на повърхнината на пирамидата е $6\left(1 + \sqrt{3}\right)$. Да се намерят:

а) обемът на пирамидата;

б) косинусът на ъгъла между стените BCQ и CDQ.



Решение.

а) От $(ABQ) \perp (ABCD) \perp (ADQ)$ $\Rightarrow AQ \perp (ABCD)$ и $\sphericalangle\left[(ADQ);(ABQ)\right] = \sphericalangle DAB = 60°$. Тогава $V = \frac{1}{3} S_{ABCD}.AQ$ и $S_{ABCD} = AB.AD \sin 60° = 2\sqrt{3}$. Тъй като $\Delta ABQ \cong \Delta ADQ$, то $BQ = DQ$, откъдето $\Delta BQC \cong \Delta DQC$. Следователно $S_{ABCDQ} = S_{ABCD} + 2S_{ABQ} + 2S_{BCQ}$. Нека $AQ = h$. Тогава $S_{ABQ} = \frac{1}{2} 2.h = h$. Построяваме $QH \perp BC$. От теоремата за трите перпендикуляра $\Rightarrow AH \perp BC$. Тъй като $\sphericalangle DAB = 60°$, $AD \parallel BC$ и $AH \perp BC$, то $\sphericalangle ABH = 60°$. Тогава $AH = \sqrt{3}$ и $QH = \sqrt{3 + h^2}$, $S_{BCQ} = \frac{1}{2} 2.\sqrt{3 + h^2} = \sqrt{3 + h^2}$. Така получаваме $6\left(1 + \sqrt{3}\right) = 2\sqrt{3} + 2h + 2\sqrt{3 + h^2}$ или $3 + 2\sqrt{3} - h = \sqrt{3 + h^2}$, откъдето $h = 3$. Следователно $V = \frac{1}{3} 2\sqrt{3}.3 = 2\sqrt{3}$.

б) Тъй като $\Delta BQC \cong \Delta DQC$, ако $BP \perp CQ$, то и $DP \perp CQ$. Следователно $\sphericalangle\left[(BCQ);(DCQ)\right] = \sphericalangle BPD = \varphi$. От равнобедрения ΔBPD ($BP = DP$) по косинусовата теорема имаме $\cos\varphi = 1 - \frac{BD^2}{2BP^2}$. От ΔABD намираме $BD = 2$. Тъй като $BP \perp CQ$ и $QH \perp BC$, то $BP.CQ = QH.BC$, откъдето $BP = \frac{QH.BC}{CQ}$. От ΔAQH намираме

$QH = 2\sqrt{3}$. От ΔAQC намираме $QC = \sqrt{21}$. Оттук $BP = \frac{2\sqrt{3}.2}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{7}}$. Тогава $\cos\varphi = 1 - \frac{4.7}{2.16} = \frac{1}{8}$.

Задачите са предложени от: Чавдар Лозанов (8.2; 11.1; 12.2; 12.3), Теодоси Витанов (8.2; 9.1), Симеон Замковой (9.2; 10.2; 11.2), Таня Ичева (12.1), Мадлен Христова (8.3; 9.3; 10.3; 11.1; 11.3), Христо Ганчев (8.1; 10.1)

Брошурата е подготвена от Чавдар Лозанов.