МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ

math-bg.com

Примерни решения на задачите

ЛОВЕЧ – 2009

ОСМИ КЛАС

8.1. Дадено е неравенството $2|x-a|\le x+1$, където a е параметър.

а) Да се реши неравенството при $a=-1$.

б) Да се намерят стойностите на a, за които решението на неравенството съдържа само едно цяло число.

Решение. а) При $x+1<0$, т.е. $x<-1$ неравенството $2|x+1|\le x+1$ няма решение. При $-1\le x$, имаме $2|x+1|\le x+1\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2(x+1)\le x+1\\-x-1\le 2(x+1)\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x\le -1\\x\ge -1\end{vmatrix}$. Следователно при $a=-1$, решението на неравенството е $x=-1$.

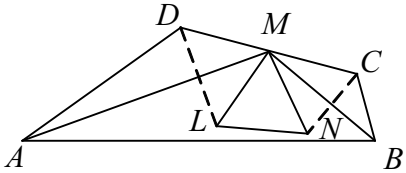
б) Неравенството има решение при $x+1\ge 0$, т.е. $x\ge -1$. За решението на неравенството получаваме:

$2|x-a|\le x+1\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2(x-a)\le x+1\\2(x-a)\ge -x-1\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x\le 2a+1\\x\ge \frac{2a-1}{3}\end{vmatrix}$. От условията $-1\le\frac{2a-1}{3}$, $-1\le 2a+1$ получаваме $a\ge -1$. Тъй като $2a+1\ge\frac{2a-1}{3}$, при $a\ge -1$, то решението е интервалът $\left[\frac{1}{3}(2a-1);2a+1\right]$. Нека m е цяло число. То ще бъде единственото цяло решение на неравенството, когато $m-1<\frac{1}{3}(2a-1)\le m\le 2a+1<m+1$. Оттук получаваме за a: $\frac{3m-2}{2}<a\le\frac{3m+1}{2}$ и $\frac{m-1}{2}\le a<\frac{m}{2}$. От условието $\frac{3m-2}{2}<\frac{m}{2}$ следва, че $m<1$, т.е. $m=-1$ или $m=0$. При $m=-1$ имаме $a\le -1$ и $a\ge -1$, т.е. $a=-1$. При $m=0$ имаме $-1<a\le\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}\le a<0$, т.е. $a\in\left[-\frac{1}{2};0\right)$. Окончателно неравенството има само едно цяло решение при $a=-1$ и $a\in\left[-\frac{1}{2};0\right)$.

8.2. Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Точката M е средата на CD и $\sphericalangle AMB=120^\circ$.

а) Построени са точки L и N така, че AM и BM са съответно симетрали на отсечките DL и CN. Да се намерят ъглите на триъгълника LMN.

б) Ако $AD+\frac{1}{2}CD+BC=AB$, да се намери сборът на ъглите DAB и ABC.



Решение. а) Тъй като AM и BM са симетрали на отсечките DL и CN, то $ML=MD$ и $MN=MC$. Но $MC=MD$, откъдето $ML=MN$. Също така $\sphericalangle DMA=\sphericalangle LMA=\alpha$ и $\sphericalangle CMB=\sphericalangle NMB=\beta$. Нека $\sphericalangle LMN=\theta$. Тогава $\alpha+\beta+\theta=\sphericalangle AMB=120^\circ$ и $2\alpha+2\beta+\theta=180^\circ$, откъдето $\theta=60^\circ$. Следователно $\triangle LMN$ е равнобедрен с ъгъл между бедрата $\theta=60^\circ$, т.е. е равностранен.

б) Тъй като AM и BM са симетрали на отсечките DL и CN, то $AD=AL$ и $BC=BN$. От а) имаме $\frac{1}{2}CD=LN$. Тогава $AD+\frac{1}{2}CD+BC=AL+LN+NB$. Но $AL+LN+NB=AB$ само когато точките L и N лежат на AB. Тогава $\sphericalangle DAM=\sphericalangle MAL=\sphericalangle MAB$ и $\sphericalangle CBM=\sphericalangle MBN=\sphericalangle MBA$. Тъй като $\sphericalangle MAB+\sphericalangle MBA=180^\circ-\sphericalangle AMB=60^\circ$, то $\sphericalangle DAB+\sphericalangle CBA=2(\sphericalangle MAB+\sphericalangle MBA)=120^\circ$.

math-bg.com

8.3. В равнината са дадени 2009 точки такива, че за всеки три от тях могат да се намерят поне две, които са на разстояние по-малко от 1. Да се докаже, че:
а) всички точки могат да се покрият най-много с два кръга с радиус 1.
б) съществува кръг с радиус 1, който покрива поне 1005 точки.
Решение. а) Нека A е една от точките и k_1 е окръжност с център A и радиус 1. Ако всички останали точки са на разстояние от точката A по-малко от единица, то всички точки се покриват с кръга k_1. Ако има точка B, за която $AB > 1$, разглеждаме окръжност k_2 с център B и радиус 1. Нека C е произволна точка, различна от A и B. Тогава от трите точки A, B и C поне две са на разстояние по-малко от 1. Понеже $AB > 1$, поне едно от разстоянията AC и BC е по-малко от 1, т.е. точката C е вътрешна или за окръжността k_1 или за k_2. Следователно двата кръга k_1 и k_2 покриват всички точки.
б) Тъй като 2009 = 2.1004 +1, то един от кръговете покрива поне 1004+1=1005 точки.

ДЕВЕТИ КЛАС

9.1. а) Да се реши системата $\begin{vmatrix} x+y=2 \\ xy=1+k^2 \end{vmatrix}$, където k е реален параметър.

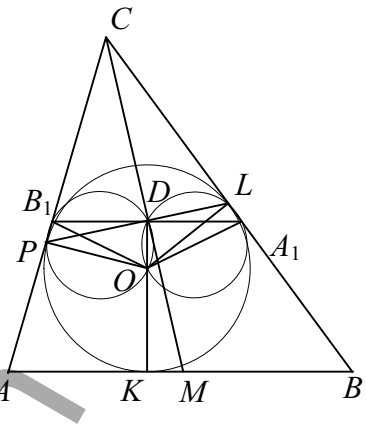
б) Квадратното уравнение $t^2-at+b=0$ има един двоен корен. Да се намерят всички тройки числа (x,y,z), които са решение на системата $\begin{vmatrix} x+y=a \\ xy-z^2=b \end{vmatrix}$.

Решение. а) Системата е еквивалентна на системата $\begin{vmatrix} x+y=2 \\ (2-y)y-k^2=1 \end{vmatrix}$. От второто уравнение получаваме уравнението $(y-1)^2+k^2=0$, което е изпълнено точно, когато $k=0$ и $y=1$. Следователно при $k=0$ решение на системата е $(1,1)$, а при $k\neq 0$ системата няма решение.
б) Квадратното уравнение има двоен корен, ако $D=a^2-4b=0$ и този корен е $\frac{a}{2}$. Тогава $b=\frac{a^2}{4}$. Дадената система добива вида $\begin{vmatrix} x+y=a \\ xy-z^2=\frac{a^2}{4} \end{vmatrix}$, която е еквивалентна на системата $\begin{vmatrix} x+y=a \\ x(a-x)-z^2=\frac{a^2}{4} \end{vmatrix}$. От второто уравнение получаваме $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+z^2=0$, което е изпълнено точно когато $x=\frac{a}{2}$ и $z=0$. Следователно решението на системата е $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right)$.
Забележка. Ако x и y са решения на дадената система, то те са решения и на уравнението $p^2-ap+\left(z^2+\frac{a^2}{4}\right)=0$. Това уравнение има решение, точно когато $z=0$.

9.2. В триъгълник ABC е вписана окръжност с център O, която се допира до страните AB, BC и CA съответно в точките K, L и P. Правата OK пресича отсечката PL в точка D. Окръжността, описана около ΔODL, пресича втори път страната BC в точка A_1, а окръжността, описана около ΔODP, пресича втори път страната AC в точка B_1.
а) Да се докаже, че A_1B_1 е успоредна на AB;
б) Нека M е пресечната точка на CD и AB. Да се намери отношението $AM:MB$.

math-bg.com

Решение. а) Нека за определеност A_1 е между A и L, а B_1 е между C и P. Тъй като четириъгълникът $ODLA_1$ е вписан, то $\sphericalangle ODA_1 = \sphericalangle OLA_1$. Но $OL \perp BC$, така че $OD \perp DA_1$. От вписания четириъгълник $ODPB_1$ имаме $\sphericalangle ODB_1 + \sphericalangle OPB_1 = 180°$. Но $OP \perp AC$, така че $OD \perp DB_1$. Следователно точка D лежи на A_1B_1 и $OD \perp A_1B_1$. Тъй като $OK \perp AB$ и $OK \perp A_1B_1$, то $AB \parallel A_1B_1$.



б) Тъй като $\sphericalangle LOA_1 = \sphericalangle LDA_1 = \sphericalangle PDB_1 = \sphericalangle POB_1$, $\sphericalangle OLA_1 = \sphericalangle OPB_1 = 90°$ и $OL = OP$ (радиуси), то $\Delta OA_1L \cong \Delta OB_1P$. Тогава $OA_1 = OB_1$ и $\Delta OA_1D \cong \Delta OB_1D$, откъдето $DA_1 = DB_1$, т.е. D е средата на A_1B_1. Тъй като $AB \parallel A_1B_1$, то $\frac{AM}{MB} = \frac{B_1D}{DA_1} = 1$.

9.3. а) Да се намерят всички четирицифрени числа от вида $\overline{13ab}$, които имат различни цифри и се делят както на 13, така и на числото $\overline{ab}$.

б) Четирицифрено число, което има различни ненулеви цифри, се дели както на числото, съставено от първите му две цифри, така и на числото, съставено от последните му две цифри. Да се докаже, че такова число се дели или на 13 или на 3.

Решение. а) Търсеното четирицифрено число можем да запишем във вида $13.100 + \overline{ab}$. Тъй като, то се дели на 13, то и числото $\overline{ab}$ се дели на 13. Двуцифрените числа, кратни на 13 са 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91. Числата 13, 39 и 91 имат еднакви цифри с 13, следователно не изпълняват условието. Непосредствено се проверява, че 1378 не се дели на 78, а числата 1326, 1352 и 1365 удовлетворяват условието.

б) Нека $\overline{cdab} = \overline{cd}.100 + \overline{ab}$ е четирицифрено число, което се дели и на $\overline{cd}$ и на $\overline{ab}$. Тогава от една страна $\overline{cd}$ дели $\overline{ab}$, т.е. $\overline{cd}.k = \overline{ab}$ и от друга страна $\overline{ab}$ дели $\overline{cd}.100$. Оттук $\overline{cd}.k$ дели $\overline{cd}.100$, т.е. k е делител на 100. При това $1 < k < 10$ (При $k = 1$ търсеното число ще има равни цифри, а при $k \geq 10$ числото $\overline{ab}$ няма да е двуцифрено). И така, числото $\overline{cdab} = \overline{cd}.100 + \overline{ab} = \overline{cd}.(100 + k)$ е равно или на $\overline{cd}.102 = \overline{cd}.3.34$, или на $\overline{cd}.104 = \overline{cd}.13.8$, или на $\overline{cd}.105 = \overline{cd}.3.35$.

ДЕСЕТИ КЛАС

10.1. Нека $f(x) = 3x - x^2$ и $g(x) = -6x^3 + 14x^2 - 4$.

а) Да се намери множеството ***M*** от решенията на неравенството $(f(x))^2 \geq g(x)$.

б) Да се намери най-голямата стойност на функцията $f(x)$ в множеството ***M***.

Решение. а) $(f(x))^2 \geq g(x) \Leftrightarrow (x^2 - 3x)^2 + 6x^3 - 14x^2 + 4 = x^4 - 5x^2 + 4 \geq 0$.

Корените на биквадратното уравнение $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ са: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$ и $x_4 = 2$. Неравенството решаваме с метода на интервалите:

$x^4 - 5x^2 + 4 = (x+2)(x+1)(x-1)(x-2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty)$.

math-bg.com

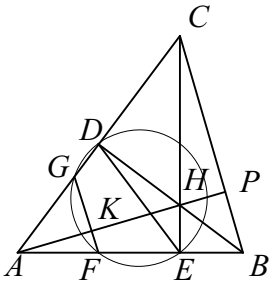
б) Най-голямата стойност на квадратната функция $f(x)=3x-x^2$ се достига при $x=\frac{3}{2}$, като $f(x)$ расте при $x<\frac{3}{2}$ и намалява при $x>\frac{3}{2}$. Но $\frac{3}{2}\in(1;2)$, а интервала $(1;2)$ не принадлежи на ***M***. Тъй като $f(1)=f(2)=2$, то $f(x)$ приема най-голяма стойност при $x=1$ и $x=2$.

10.2. В остроъгълен триъгълник ABC точка H е пресечната точка на височината CE към AB с височината BD към AC. Окръжност с диаметър DE пресича страните AB и AC съответно в точки F и G. Правите FG и AH се пресичат в точка K. Ако $BC=25$, $BD=20$ и $BE=7$, да се намери:

а) периметърът на триъгълника ABC;

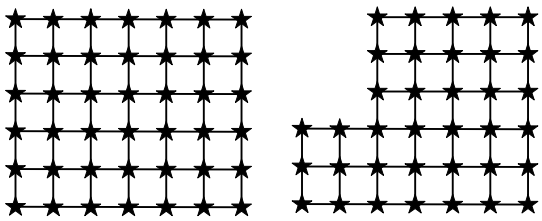
б) дължината на отсечката AK.

Решение. а) От правоъгълните триъгълници BCD и BCE намираме $CD=\sqrt{25^2-20^2}=15$ и $CE=\sqrt{25^2-7^2}=24$. От $\Delta ADB\sim\Delta AEC$ следват равенствата $\frac{AD}{AE}=\frac{BD}{CE}=\frac{AB}{AC}$. Заместваме и от равенствата $\frac{AD}{AE}=\frac{5}{6}=\frac{AE+7}{AD+15}$ получаваме $AD=15$ и $AE=18$. Тогава $AB=25$, $AC=30$ и периметърът на триъгълника ABC е 80.



б) Тъй като $\sphericalangle EFD=90°$, то $DF\|CE$. Но D е средата на AC, откъдето следва, че $AF=FE=9$. Тъй като точките E и D лежат на една окръжност с точките G и F и на втора окръжност с точките B и C, то $\sphericalangle AFG=\sphericalangle ADE=\sphericalangle ABC$, т.е. $GF\|CB$. От теоремата на Талес получаваме $\frac{AK}{AP}=\frac{AF}{AB}$, където P петата на височината към BC. Тъй като BD е височина и медиана в ΔABC, то $BA=BC$, откъдето следва, че $AP=CE=24$. Окончателно $AK=\frac{9.24}{25}=8,64$.

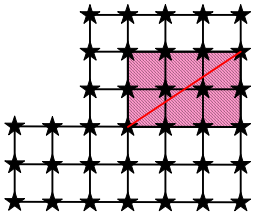
10.3. Дадена е квадратна мрежа, съставена от 6x5 квадратчета. Пресечните точки на линиите са означени със звездички.



а) Колко са квадратите с върхове в звездичките и страни, успоредни на линиите на мрежата?

б) От мрежата е изрязан правоъгълник 2x3, както е показано на фигурата. Колко са правоъгълниците (в това число и квадратите) с върхове в звездичките и страни, успоредни на линиите на мрежата?

Решение. а) Очевидно възможно най-големият квадрат, който може да се преброи, е с размери 5x5. Ще преброим поотделно квадратите с различни размери като първо преброим тези, които лежат върху най-долния ред, и получения брой умножим по броя на редовете, за които това е възможно. С размер 1x1 те са 6.5 = 30; с размер 2x2 те са 5.4 = 20; с размер 3x3 те са 4.3 = 12; с размер 4x4 те са 3.2 = 6 и накрая с размер 5x5 те са 2. Окончателно: 30 + 20 + 12 + 6 + 2 = 70 квадрати.



б) Нека разгледаме две произволни звездички от мрежата. Ако те не лежат на линия от нея, те еднозначно определят правоъгълник като два срещуположни негови върха. Броят на всички звездички в мрежата 2x6 са 3.7 = 21. Всяка от тях с всяка от останалите образуват отсечка (диагонал) и тъй като ги броим два пъти, то броят на тези отсечки е (21.20):2 = 210. От тях по една хоризонтална линия

math-bg.com

има 21 отсечки, а на всяка вертикална – 3 отсечки. Броят на търсените отсечки диагонали е 210 – 3.21 – 7. 3 = 126. Тъй като всеки правоъгълник има два диагонала, то броят на правоъгълниците в тази ивица е 63. Аналогично в мрежата 4x5 има 150 правоъгълника. При броенето правоъгълниците в мрежата 2x4 (те са 30 на брой) са броени два пъти.
Следователно, броят на правоъгълниците във фигурата е 63 + 150 – 30 = 183.

ЕДИНАДЕСЕТИ КЛАС

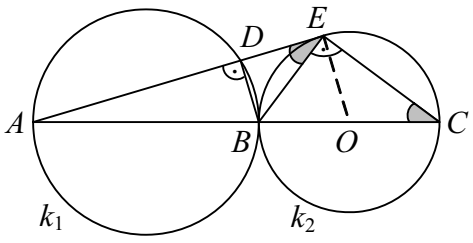
11.1. Нека реалните числа p и q са такива, че уравнението $x^2+x-p-q=0$ няма реални корени. Да се докаже, че:
а) уравнението $x^2-2qx+p=0$ има два различни реални корена;
б) уравнението $x^2+\left(q-\frac{3}{2}\right)x+5p+4q-\frac{1}{2}=0$ има реални корени $x_1<x_2$ такива, че интервалът $(x_1,\ x_2)$ съдържа поне три цели числа.

Решение. Уравнението $x^2+x-p-q=0$ няма реални корени, когато $D=1+4p+4q<0$, т.е. $p+q<-\frac{1}{4}$.

а) Уравнението $x^2-2qx+p=0$ има два различни реални корена, когато $D=q^2-p>0$ или $p<q^2$. Тъй като $p<-q-\frac{1}{4}$, достатъчно е да покажем, че $-q-\frac{1}{4}\le q^2$ или $0\le q^2+q+\frac{1}{4}$. Но $q^2+q+\frac{1}{4}=\left(q+\frac{1}{4}\right)^2\ge 0$.

б) Уравнението $x^2+\left(q-\frac{3}{2}\right)x+5p+4q-\frac{1}{2}=0$ ще има реални корени $x_1<x_2$ такива, че интервалът $(x_1,\ x_2)$ съдържа поне три цели числа, когато $D>0$ и $x_2-x_1>3$. Но $x_2-x_1=\sqrt{D}$. Следователно трябва да покажем, че $\sqrt{D}>3$ или $D>9$. Последователно пресмятаме $\left(q-\frac{3}{2}\right)^2-20p-16q+2>9\Leftrightarrow\left(q-\frac{3}{2}\right)^2-4p>7+16(p+q)$. Понеже $16(p+q)<-4$, то $7+16(p+q)<3$ и е достатъчно да покажем, че $\left(q-\frac{3}{2}\right)^2-4p\ge 3$ или $q^2-p\ge 3(p+q)+\frac{3}{4}$. Но $3(p+q)+\frac{3}{4}<3\left(-\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{4}=0$ и $q^2-p>0$, откъдето следва, че $D>9$ и $x_2-x_1>3$.

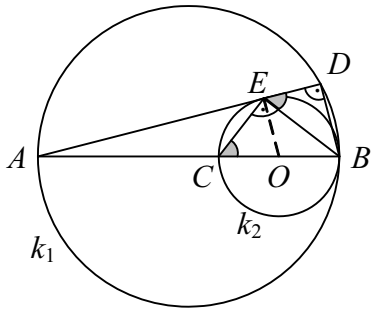
11.2. Точките *A*, *B* и *C* лежат на една права. Построени са две окръжности k_1 и k_2 с диаметри съответно отсечките *AB* и *BC*. През точката *A* е построена права, която пресича k_1 в точка *D* и се допира до k_2 в точка *E*. Да се намерят радиусите на окръжностите, ако $BD=9$ и $BE=12$.



Решение. Възможни са три случая:
I. *A* е между *B* и *C*. Тогава не съществува допирателна към окръжността k_2, която пресича k_1.
II. *B* е между *A* и *C*. Тогава $\sphericalangle BCE=\sphericalangle BED$, откъдето $\Delta BEC\sim\Delta BDE$ и $\frac{BD}{BE}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow BC=16$. Следователно $BO=OC=OE=8$. Последното е невъзможно, защото от $\Delta ABD\sim\Delta AOE$ и $AO>AB$ следва, че $OE>BD$.

math-bg.com

III. C е между A и B. Тогава $\sphericalangle BCE = \sphericalangle BED$, откъдето $\triangle BEC \sim \triangle BDE$ и $\frac{BD}{BE} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow BC = 16$. Следователно $BO = OC = OE = 8$. Ако R е радиусът на k_1, от $\triangle ABD \sim \triangle AOE$ намираме $\frac{AB}{AO} = \frac{BD}{OE} \Rightarrow \frac{2R}{2R-8} = \frac{9}{8} \Rightarrow R = 36$.



Забележка. Може да се използва и тригонометрия. Ако $\sphericalangle BED = \alpha$, то $\sphericalangle BOE = 2\alpha$. От $\triangle BDE$ намираме $\sin\alpha = \frac{3}{4}$ и от $\triangle BOE$: $BO = \frac{BE}{2\sin\alpha} = 8$.

11.3. Таблица съдържа 2009 реда и K колони. Във всяка клетка на таблицата е написан сборът на номерата на реда и на колоната, в които се намира клетката.
а) Да се намери сумата на написаните числа.
б) Колко е вероятността числото в случайно избрана клетка от таблицата да е четно?

Решение. а) В първи ред имаме $(1+1)+(1+2)+...+(1+K) = K + \frac{K(K+1)}{2}$. Аналогично, във втория ред сумата е $2K + \frac{K(K+1)}{2}$ и т.н., в 2009-я ред сумата е $2009K + \frac{K(K+1)}{2}$. Тогава за сумата на всички числа получаваме

$$K\left(1+2+3+...+2009\right) + 2009.\frac{K(K+1)}{2} = \frac{2009K(K+2011)}{2}.$$

б) Броят на всички клетки е $2009K$. Броят на четните числа в реда зависи от четността на K. Нека $K = 2k$. Тогава във всеки ред четните числа са k (във нечетните – първото, третото и т.н., а в четен ред – второто, четвъртото, ..., последното), а в цялата таблица – $2009k$. Следователно вероятността в този случай е 0,5. Нека $K = 2k+1$. Тогава във всеки нечетен ред четните числа са $k+1$, а във всеки четен – k. Тогава всички четни числа са $1005(k+1)+1004k = 2009k+1005$. Следователно вероятността в този случай е $\frac{2009K-2009+2010}{2.2009K} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4018K}$.

ДВАНАДЕСЕТИ КЛАС

12.1. Дадено е уравнението $x^4 - (3k+2)x^2 + k^2 = 0$, където k е реален параметър. Да се намерят стойностите на k, при които уравнението има:
а) точно три реални корена;
б) поне три реални корена, които образуват аритметична прогресия.

Решение. Полагаме $z = x^2$. Уравнението $z^2 - (3k+2)z + k^2 = 0$ има неотрицателни реални корени, когато $D = (3k+2)^2 - 4k^2 = (k+2)(5k+2) \geq 0$ и $3k+2 \geq 0$. Оттук получаваме $k \leq -2$, $k \geq -\frac{2}{5}$ и $k \geq -\frac{2}{3}$. Окончателно $k \geq -\frac{2}{5}$.

а) Имаме $z_1 = \frac{1}{2}\left(3k+2+\sqrt{D}\right)$ и $z_2 = \frac{1}{2}\left(3k+2-\sqrt{D}\right)$. Тъй като, при $k \geq -\frac{2}{5}$ $z_1 > 0$, то за да има уравнението три корена трябва $z_2 = 0$. Оттук намираме $3k+2-\sqrt{D} = 0$ или

math-bg.com

$(3k+2)^2=(3k+2)^2-4k^2$, т.е. $k=0$. Следователно, при $k=0$, уравнението има точно три реални корена: $x_1=-\sqrt{2}$, $x_2=0$ и $x_3=\sqrt{2}$.

б) При $k=-\frac{2}{5}$, $z_1=z_2$ и уравнението има два реални корена. При $k>-\frac{2}{5}$, $k\neq 0$ уравнението има четири реални корена: $x_1=-\sqrt{z_1}$, $x_2=-\sqrt{z_2}$, $x_3=\sqrt{z_2}$, $x_4=\sqrt{z_1}$, като $x_1<x_2<x_3<x_4$ и $x_1+x_4=x_2+x_3$. Остава да проверим при кои стойности на k $2x_3=x_2+x_4$. Последователно намираме $2\sqrt{z_2}=-\sqrt{z_2}+\sqrt{z_1}$ или $3\sqrt{z_2}=\sqrt{z_1}$, т.е. $9z_2=z_1$. Оттук $4(3k+2)=5\sqrt{D}$ или $(9k+6)(6-k)=0$ и $k_1=-\frac{6}{19}$, $k_2=6$. Тъй като $k_1,k_2>-\frac{2}{5}$, то корените образуват аритметична прогресия. От а) при $k_3=0$ уравнението има три реални корена, за които непосредствено се проверява, че образуват аритметична прогресия. Окончателно: $k_1=-\frac{6}{19}$, $k_2=6$ и $k_3=0$.

12.2. В окръжност с радиус 1 е вписан триъгълник ABC с $\sphericalangle CAB=45°$. Симетралата на страната AB пресича страната AC във вътрешна точка D, като $CD = kAD$. Нека S е лицето на триъгълника ABC.

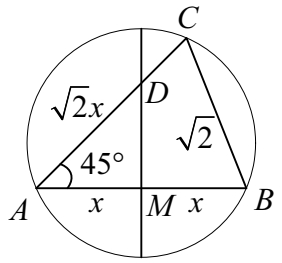
а) Да се намери S при $k=1$.

б) Да се изрази S като функция на k и намери стойността на k, при която S е най-голямо.

Решение. Нека M е средата на страната AB.

а) При $k=1$, $CD = AD$ и от $AM = MB$ намираме $\frac{AD}{AM}=\frac{DC}{MB}=1$. От теоремата на Талес следва че, $MD \parallel BC$. Но $MD\perp AB$ така че $\sphericalangle ABC=90°$. Тогава AC е диаметър на описаната окръжност и $AC=2$. Тъй като $\sphericalangle CAB=45°$, то $AB=BC=\sqrt{2}$ и $S_{ABC}=1$.

б) Да означим $AM=MB=x$. От равнобедрения правоъгълен триъгълник AMD имаме $AD=\sqrt{2}x$, откъдето $CD=k\sqrt{2}x$. Тогава $AB=2x$, $AC=(k+1)\sqrt{2}x$ и $S=\frac{1}{2}AC.AB.\sin 45°=\frac{1}{2}2x\sqrt{2}(k+1)x\frac{\sqrt{2}}{2}=(k+1)x^2$. По синусова теорема имаме $BC=2\sin 45°=\sqrt{2}$. По косинусова теорема имаме $BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC\cos 45°$ или $2=2\left(k^2+1\right)x^2$, откъдето $x^2=\frac{1}{1+k^2}$. Следователно $S=\frac{k+1}{1+k^2}$. Нека $\sphericalangle ABC=\beta$ и $\sphericalangle ACB=135°-\beta$. Тогава $AC=2\sin\beta$, $AB=2\sin(135°-\beta)$,



$S=\frac{1}{2}AC.AB.\sin 45°=\sqrt{2}\sin(135°-\beta)\sin\beta=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(135°-2\beta)-\cos 135°\right)=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos(135°-2\beta)+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Лицето S е най-голямо, когато $\cos(135°-2\beta)$ достига максимума си. Но $\max\left(\cos(135°-2\beta)\right)=1$, откъдето $\max S=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$. Тогава $\frac{k+1}{1+k^2}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ и $k=\sqrt{2}-1$.

Забележка. Лицето S е най-голямо, когато $f(k)=\frac{k+1}{1+k^2}$ достига максимума си. Имаме $f'(k)=\frac{k^2+1-(k+1)2k}{\left(1+k^2\right)^2}=\frac{-k^2-2k+1}{\left(1+k^2\right)^2}$, $f'(k)=0$ за $k=-1\pm\sqrt{2}$. Но $k>0$, $f'(k)>0$ при

math-bg.com

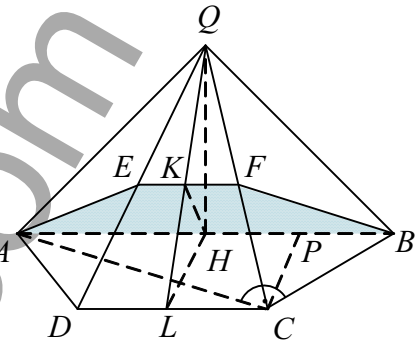
$k \in \left(0;\sqrt{2}-1\right)$, $f'(k)<0$ при $k>\sqrt{2}-1$. Следователно лицето S е най-голямо при $k=\sqrt{2}-1$.

12.3. Основата $ABCD$ на пирамидата $QABCD$ е трапец с основи AB и CD, $AC \perp CB$ и $\sphericalangle CAB = 30°$. Околните ръбове на пирамидата са равни помежду си, $\sphericalangle AQB = 90°$ и лицето на ΔAQB е 4. Да се намери:

а) обемът на пирамидата;

б) лицето на сечението на пирамидата с равнина α, която минава през ръба AB и сключва с равнината на основата ъгъл, равен на ъгъла между равнините (QCD) и $(ABCD)$.

Решение. Нека H е ортогоналната проекция на върха Q върху равнината $ABCD$. От $QA=QB=QC=QD$ следва, че H е център на описаната около $ABCD$ окръжност. От $AC \perp CB$ следва, че AB е диаметър на тази окръжност, т.е. H е средата на AB. От $\sphericalangle CAB = 30°$ следва, че $BC = \frac{1}{2}AB$ и $\sphericalangle CHB = 60°$. Тъй като $ABCD$ е вписан в окръжност, той е равнобедрен $BC = AD$ и $\sphericalangle AHD = 60°$. Оттук $\sphericalangle CHD = 60°$ и $CD = \frac{1}{2}AB$. От $QA=QB$ и $\sphericalangle AQB = 90°$ имаме, че $QH = \frac{1}{2}AB$. Тогава $S_{AQB} = \frac{1}{2}AB.QH = QH^2 = 4$, откъдето $QH = 2$, $AB = 4$ и $CD = 2$.



а) За обема V на пирамидата имаме $V = \frac{1}{3}S_{ABCD}.QH$. Нека $CP \perp AB$. От ΔACP намираме $CP = AC\sin 30° = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Тогава $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB+CD).CP = 3\sqrt{3}$. Оттук $V = \frac{1}{3}\frac{3\sqrt{3}}{4}4.2 = 2\sqrt{3}$.

б) Нека $\alpha \cap CQ = F$ и $\alpha \cap DQ = E$. Тъй като $AB \parallel CD$, то $EF \parallel CD \parallel AB$. Следователно сечението на пирамидата с равнината α е трапеца $ABFE$. Нека L е средата на CD. Тогава $LH \perp AB$ и $(QLH) \perp AB$. Ако $EF \cap LQ = K$, то $\sphericalangle\{\alpha,(ABCD)\} = \sphericalangle KHL$ и $\sphericalangle\{(QCD),(ABCD)\} = \sphericalangle KLH$. Следователно точка K е такава, че $\sphericalangle KLH = \sphericalangle KHL$. Тъй като $\sphericalangle QHL = 90°$, то K е средата на хипотенузата LQ. От ΔQLH намираме $QL = \sqrt{QH^2+LH^2} = \sqrt{2^2+\frac{3}{4}2^2} = \sqrt{7}$ и $KH = 2\frac{\sqrt{7}}{4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$. Тъй като $KH \perp AB$ и $EF = \frac{1}{2}CD = 1$, то $S_{ABFE} = \frac{1}{2}(AB+EF).KH = \frac{5\sqrt{7}}{4}$.

Задачите са предложени от: Чавдар Лозанов (8.1; 11.1; 12.2; 12.3), Теодоси Витанов (8.3; 11.2), Симеон Замковой (8.2; 9.2; 11.1), Таня Ичева (10.1; 12.1), Мадлен Христова (9.1; 9.3; 10.2; 10.3; 11.3)

Брошурата е подготвена от Чавдар Лозанов.

math-bg.com