

**НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА  
ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ  
И ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ,  
Ловеч, 2008**

**8. КЛАС**

1. Да се намерят всички стойности на цифрите  $a$ ,  $b$  и  $c$ , за които числото  $\sqrt{a2bc}$  е цяло и се дели на 6. ( $\overline{a2bc} = 10^3 \cdot a + 10^2 \cdot 2 + 10 \cdot b + c$ ).

**Решение.** Ако  $\sqrt{a2bc}$  се дели на 6, то  $A = \overline{a2bc}$  се дели на 36. Следователно  $A = 36k^2$ , където  $k$  е естествено число. Тъй като  $36 \cdot 5^2 < 1000$  и  $36 \cdot 17^2 > 9999$ , то  $k = 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$ . Ако  $k = 10$  или  $15$ , то  $A = p^2 \cdot 100$ , т.e.  $p^2$  завършива на 2, което не е възможно. Непосредствено се проверява, че  $A = 36 \cdot 6^2 = 1296$  и  $A = 36 \cdot 16^2 = 9216$  са единствените решения. Необходимо е да уточним, че при  $a = 0$ , числата 225 и 256 не се делят на 36.

2. Точката  $D$  е вътрешна за остроъгълния триъгълник  $ABC$ , като  $DP \perp BC, P \in (BC)$  и  $DQ \perp AB, Q \in (AB)$ . Ако  $M$  е средата на страната  $AC$ , да се докаже, че  $MP = MQ$  тогава и само тогава, когато  $\angle PCD = \angle QAD$ .

**Решение.** Нека  $K$  и  $L$  са съответно средите на отсечките  $AD$  и  $CD$ . Тогава  $ML = AK = KD$  и  $MK = CL = LD$ , защото  $ML$  и  $MK$  са средни отсечи в триъгълника  $ADC$ . В правоъгълните триъгълници  $AQD$  и  $CPD$   $KQ$  и  $LP$  са медиани към хипотенуите, така че  $KQ = KD = ML$  и  $LP = LD = MK$ .

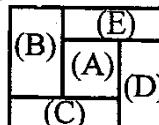
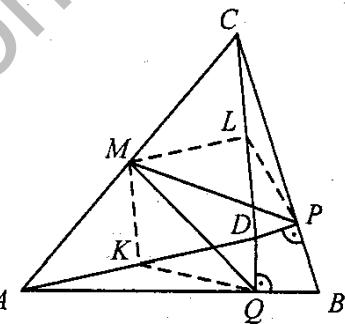
Ако  $MP = MQ$ , то  $\triangle MKQ \cong \triangle PLM$  (II признак). Следователно  $\angle MLP = \angle MKQ$ . Но  $\angle MLD = \angle MKD$ , защото  $MLDK$  е успоредник, та че  $\angle DLP = \angle DKQ$ .

Тъй като  $\angle DAQ = \frac{1}{2} \angle DKQ$  и  $\angle DCQ = \frac{1}{2} \angle DLP$ , то  $\angle PCD = \angle QAD$ .

Ако  $\angle PCD = \angle QAD$ , то  $\angle DLP = \angle DKQ$  и  $\angle MLP = \angle MKQ$ . Тогава  $\triangle MKQ \cong \triangle PLM$  (I признак), откъдето  $MQ = MP$ .

3. Да се докаже, че от пет квадрата, всеки два от които са с различни дължини на страните, не може да се състави правоъгълник.

**Решение.** Петте квадрата имат страни с различни дължини и следователно един от тях има страна с най-малка дължина. Да изберем този квадрат и да долепим до него кой да е от останалите. Ако се опитаме да сглобим правоъгълник, на следваща стъпка някой от останалите три квадрата трябва да покрие защрихованата част. Тази ситуация се повтаря, докато четирите квадрата заобиколят този с най-малка страна, както е показано на чертежа. Нека квадрат (A) има страна с дължина  $a$ , квадрат (B) –  $b$ , квадрат (C) –  $c$ , квадрат (D) –  $d$ , и квадрат (E) –  $e$ . Тогава за дължините на страните са в сила равенствата  $b = a + e$ ,  $c = a + b$ ,  $d = a + c$ ,  $e = a + d$ . Сборът на тези четири равенства е  $4a = 0$ , т.e.  $a = 0$ . Този резултат доказва твърдението.



**НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА  
ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ  
И ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ,  
Ловеч, 2008**

9. КЛАС

1. а) Да се докаже, че  $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$ .

б) Ако  $x_1$  и  $x_2$  ( $x_1 > x_2$ ) са корените на уравнението  $x^2 - 4x + 1 = 0$ , а  $y_1$  и  $y_2$  ( $y_1 > y_2$ ) са корените на уравнението  $y^2 - 3\sqrt{2}y + 3 = 0$ , да се изчисли стойността на израза  $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2}$ .

Решение. а) Представяме  $2+\sqrt{3}$  като  $2+\sqrt{3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{2} = \frac{1+2\sqrt{3}+3}{2} = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$ . За знаменателя на първото събираме получаваме

$$\sqrt{2} + \frac{|1+\sqrt{3}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}} = \sqrt{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично от  $2-\sqrt{3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = \frac{(1-\sqrt{3})^2}{2}$  получаваме

$$\sqrt{2} - \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2}} = \sqrt{2} - \frac{|1-\sqrt{3}|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(1-\sqrt{3})}{\sqrt{2}}.$$

Окончателно  $A = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})} + \frac{\sqrt{2}(1-\sqrt{3})^2}{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \sqrt{2}$ .

б) Корените на уравнението  $x^2 - 4x + 1 = 0$  са  $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$ , а на уравнението

$y^2 - 3\sqrt{2}y + 3 = 0$  са  $y_{1,2} = \frac{3\sqrt{2} \pm \sqrt{18-12}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ . Остава да забележим, че  $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} = A$  и вече знаем, че  $A = \sqrt{2}$ .

2. В триъгълника  $ABC$  точка  $J$  е центърът на вписаната окръжност, а  $D$  е петата на перпендикуляра, спуснат от  $C$  към ъглополовящата на  $\angle CAB$ . Описаната около триъгълника  $CJD$  окръжност пресича втори път страната  $BC$  в точка  $P$ , а правата  $DP$  пресича страната  $AB$  в точка  $Q$ . Да се докаже, че:

- а) точките  $Q$  и  $P$  лежат на вписаната в триъгълника  $ABC$  окръжност;
- б) ако  $QD = CD$ , то  $AC = BC$ .

Решение. а) От  $\angle JDC = 90^\circ$  следва, че  $CJ$  е диаметър и  $\angle JPC = 90^\circ$ , т.e.  $P$  лежи на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност. Означаваме  $AJ \cap BC = L$ ,  $\angle CAB = \alpha$ ,  $\angle ABC = \beta$  и  $\angle BCA = \gamma$ . Тъй като  $\angle JCD = \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2}$ , то  $J$  е между  $A$  и  $D$ . Ако  $D$  е между

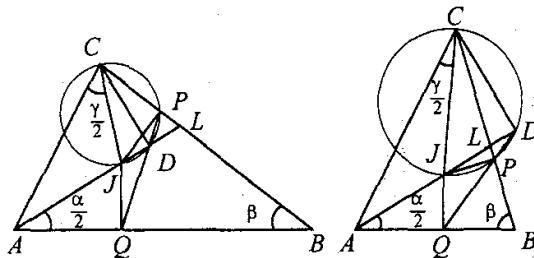
$J$  и  $L$ , то  $\angle JPD = \angle JCD = \frac{\beta}{2}$  и  $\angle QPB = 90^\circ - \angle JPD = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ . Ако  $L$  е между  $J$  и  $D$ , то  $\angle JPD = 180^\circ - \angle JCD = 180^\circ - \frac{\beta}{2}$  и  $\angle QPB = \angle CPD = \angle JPD - 90^\circ = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ .

Тогава  $\angle PQD = 180^\circ - (\angle QPB + \angle QBP) = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$  и следователно  $QB = PB$ , т.e.  $Q$  лежи на вписаната в  $\triangle ABC$  окръжност.

6) От  $\angle AQC = 90^\circ + \frac{\beta}{2} = \angle AJC$  и  $\angle CAD = \frac{\alpha}{2} = \angle DAQ$  следва, че  $\triangle AQD \sim \triangle AJC$ .

Тогава  $\frac{AQ}{AJ} = \frac{QD}{JC}$ . Но  $QD = CD$ , така че  $\frac{AQ}{AJ} = \frac{CD}{JC}$ , откъдето  $\triangle AQJ \sim \triangle CDJ$  и

$\angle JAQ = \frac{\alpha}{2} = \angle JCD$ . Но  $\angle JCD = 90^\circ - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta}{2}$ . Следователно  $\alpha = \beta$  и  $AC = BC$ .



3. Нека  $x$  е реален корен на уравнението  $x^5 - x^3 + x = 2$ . Да се докаже, че  $3 < x^6 < 4$ .

Решение. Записваме условието като  $x(x^4 - x^2 + 1) = 2$  и понеже  $x^4 - x^2 + 1 > 0$  за всяко  $x$ , то  $x > 0$ . Но  $x^4 - x^2 + 1 \geq x^2$ , откъдето  $2 \geq x \cdot x^2 = x^3$ . Равенството е при  $x = 1$ , но тази стойност не е корен на уравнението. Следователно  $x^3 < 2$  и тъй като  $x^3 > 0$ , то  $x^6 < 4$ . От друга страна имаме  $x^6 = x^4 - x^2 + 2x$  и  $x^4 = x^2 - 1 + \frac{2}{x}$ . Тогава

$$x^6 = x^2 - 1 + \frac{2}{x} - x^2 + 2x = -1 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) \geq -1 + 2 \cdot 2 = 3.$$

Понеже  $x \neq 1$ , неравенството е строго, т.е.  $x^6 > 3$ .

**НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА  
ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ  
И ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ,  
Ловеч, 2008**

**10. КЛАС**

1. Дадено е уравнението  $(m^2 + 2)x^2 - 2(m^2 + m + 2)x + 2m = 0$ , където  $m$  е реално число.

a) Да се докаже, че уравнението има два различни реални корена  $x_1$  и  $x_2$  за всяка стойност на  $m$ .

b) Да се докаже, че за всяко  $m$  са в сила неравенствата  $\frac{4-\sqrt{2}}{2} \leq x_1 + x_2 \leq \frac{4+\sqrt{2}}{2}$ .

**Решение.** а) Пресмятаме дискриминантата на уравнението по съкратената формула  $(m^2 + m + 2)^2 - 2m(m^2 + 2) = m^4 + 5m^2 + 4 > 0$ , което показва, че уравнението има два различни реални корена.

б) От формулите на Виет следва, че  $x_1 + x_2 = \frac{2(m^2 + m + 2)}{m^2 + 2} = 2 + \frac{2m}{m^2 + 2}$ .

Понеже  $\frac{4 \pm \sqrt{2}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ , задачата се свежда до доказване на неравенствата

$-\frac{1}{2\sqrt{2}} \leq \frac{m}{m^2 + 2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$ , които от своя страна са еквивалентни с  $(m \pm \sqrt{2})^2 \geq 0$ .

2. В равнобедрения трапец  $ABCD$  ъглите при основата  $AB$  са равни на  $30^\circ$ , диагоналът  $AC$  е ъглополовяща на  $\angle DAB$ , ъглополовящата на  $\angle BCD$  пресича  $AB$  в точка  $M$ , а отсечката  $DM$  пресича  $AC$  в точка  $N$ . Да се намери лицето на триъгълника  $AMN$ , ако лицето на трапеца е  $2 + \sqrt{3}$ .

**Решение.** Понеже  $AC$  е ъглополовяща на  $\angle DAB$ , то  $AD = DC = CB = b$ . От правоъгълния  $\triangle CHB$  намираме  $CH = \frac{b}{2}$  и  $BH = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ . Тъй като  $AB = CD + 2HB = (1 + \sqrt{3})b$ ,

то  $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot CH = \frac{(2 + \sqrt{3})b^2}{4}$ .

Оттук  $b = 2$ ,  $AB = 2 + 2\sqrt{3}$ .

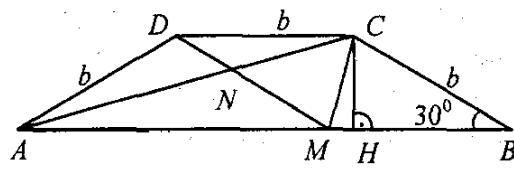
Тъй като  $\angle MCB = \frac{1}{2}\angle DCB = 75^\circ$ , то

$\angle MCB = \angle CMB = 75^\circ$  и  $MB = 2$ . Тогава

$AM = 2\sqrt{3}$  и  $S_{AMC} = \frac{1}{2}AM \cdot CH = \sqrt{3}$ . Тъй като  $\frac{S_{AMN}}{S_{AMC}} = \frac{AN}{AC}$ , то  $S_{AMN} = \frac{AN}{AC} \cdot S_{AMC}$ .

От  $\triangle AMN \sim \triangle CDN$  намираме  $\frac{AN}{NC} = \frac{AM}{CD} = \sqrt{3}$ , така че  $\frac{AN}{AC} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$ .

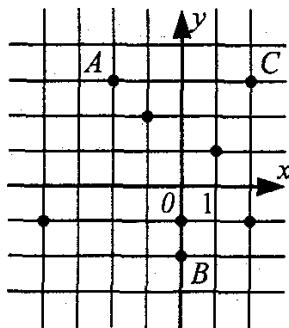
Оттук  $S_{AMN} = \frac{3 - \sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1)$ .



3. В координатната система са отбелязани 8 точки с целочислени координати, както е показано на фигурата.

а) Графиката на квадратната функция  $k(x) = ax^2 + bx + c$  минава през точките  $A$ ,  $B$  и  $C$ . Да се реши неравенството  $\frac{k(x)}{x} \leq 0$ .

б) Колко са всички квадратни функции с аргумент  $x$ , графиките на които минават през три от отбелязаните точки, като едната от тях е върхът на съответната парабола? (Отговорът да се обоснове.)



Решение. а) Тъй като координатите на точките  $A$ ,  $B$  и  $C$  са съответно  $(-2; 3)$ ,  $(0; -2)$  и  $(2; 3)$ , то коефициентите на функцията  $k(x)$  са решението на системата

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 3 \\ c = -2 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8a + 2c = 6 \\ 4b = 0 \\ c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,25 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}. \text{ Следователно } k(x) = 1,25x^2 - 2.$$

Неравенството  $\frac{1,25x^2 - 2}{x} \leq 0$  при  $x \neq 0$  е равносилно на  $x(x - 0,4\sqrt{10})(x + 0,4\sqrt{10}) \leq 0$ .

Решението на последното неравенство е  $x \in (-\infty; -0,4\sqrt{10}] \cup (0; 0,4\sqrt{10}]$ .

б) Да отбележим, че на фигурата има три тройки точки такива, че точките от всяка тройка лежат на една права, т.е. определят линейна, а не квадратна функция. Освен това е очевидно, че кои да са две точки с равни първи координати не лежат на една и съща парабола. Ще използваме факта, че графиката на квадратната функция  $y = ax^2 + bx + c$

е парабола с върхът точката  $V\left(-\frac{b}{2a}; \frac{D}{4a}\right)$  и ос на симетрия правата  $x = -\frac{b}{2a}$ , минаваща през  $V$  и успоредна на оста  $Oy$ . Правата  $x = -2$  е ос на симетрия за точките  $(-4; -1)$  и  $(0; -1)$  и следователно, здраво с точката  $A$  определят графика на квадратна функция. Аналогично точките  $(-4; -1)$  и  $(2; -1)$  са от графиката на функция с върхът точката  $(-1; 2)$ ; точките  $(0; -1)$  и  $(2; -1)$  са от графиката на функция с върхът точката  $(1; 1)$ ; а точките  $A$  и  $C$  лежат на параболи с върхът точка  $B$  и точка  $(0; -1)$ . Остана да проверим възможността две от дадените точки да са от ляв (десен) клон спрямо върха на парабола. Точки  $A$ ,  $B$  и  $(-1; 2)$  са от параболата  $y = -1,5x^2 - 2,5x - 2$ , но нито една от тях не е върхъ. Аналогично точките  $A$ ,  $(1; 1)$  и  $(2; -1)$  са от параболата  $y = -\frac{1}{3}x^2 - x + 2\frac{1}{3}$ , но нито една от тях не е върхъ; точките  $B$ ,  $C$  и  $(1; 1)$  лежат на параболата  $y = -\frac{1}{2}x^2 - 3\frac{1}{2}x - 2$ , върхът на която не е точка  $C$ ; точките  $C$  и  $(1; 1)$  не лежат на парабола с върхъ  $(-4; -1)$  и точка  $C$  не е върхъ на параболата, минаваща през точките  $(-4; -1)$  и  $(-1; 2)$ . Окончателно има 5 квадратни функции, които удовлетворяват условието на задачата.

**НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА  
ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ  
И ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ,  
Ловеч, 2008**

11 клас

1. В триъгълника  $ABC$   $AB = 2BC$  и  $\cos(\angle ABC) = \frac{2}{3}$ . Медианата  $AM$  и ъглополовящата  $BL$  се пресичат в точка  $K$ . Правата  $CK$  пресича  $AB$  в точка  $H$ .
- Да се докаже, че  $CH \perp AB$ .
  - Ако лицето на триъгълника  $ABC$  е  $S$ , да се намери лицето на четириъгълника  $AHKL$ .

**Решение.** а) Нека  $BC = 2x$ . Тогава  $AB = 4x$  и  $BM = CM = x$ . Построяваме  $MP \parallel CH$ . По теоремата на Талес имаме  $HP = PB = y$  и  $\frac{AK}{KM} = \frac{AH}{HP} = \frac{4x - 2y}{y}$ .

Но  $BK$  е ъглополовяща в  $\triangle ABM$ , така че  $\frac{AK}{KM} = \frac{AB}{MB} = \frac{4x}{x} = 4$ . Оттук  $\frac{4x - 2y}{y} = 4$  и  $y = \frac{2}{3}x$ , т.e.  $HB = \frac{4}{3}x$ . От  $\triangle CHB$  по косинусовата теорема намираме  $CH^2 = \frac{20}{9}x^2$ . Тогава от  $CH^2 + HB^2 = BC^2$  следва, че  $CH \perp AB$ .

**Забележка.** Може да се приложи и теоремата на Чева:  $\frac{BP}{PA} \cdot \frac{AC}{CB} \cdot \frac{CM}{MB} = 1$ ,  $\frac{BH}{HA} \cdot 2 \cdot 1 = 1$ ,  $HB = \frac{1}{2}AH = \frac{4}{3}x$ .

б)  $S_{AHKL} = S_{AHK} + S_{AKL}$ . Тъй като  $AM$  е медиана, то  $S_{ABM} = S_{ACM} = \frac{1}{2}S_{ABC} = \frac{1}{2}S$ .

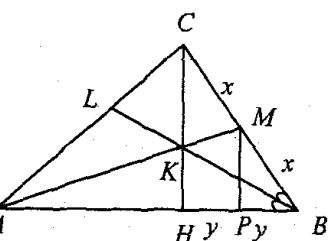
Но  $\frac{S_{AKH}}{S_{ABM}} = \frac{AH}{AB} \cdot \frac{AK}{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$  и  $\frac{S_{AKL}}{S_{ACM}} = \frac{AL}{AC} \cdot \frac{AK}{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ .

Тогава  $S_{AKH} = \frac{8}{15} \cdot \frac{S}{2} = \frac{4}{15}S$  и  $S_{AKL} = \frac{8}{15} \cdot \frac{S}{2} = \frac{4}{15}S$ , откъдето  $S_{AHKL} = S_{AHK} + S_{AKL} = \frac{8}{15}S$ .

2. В таблица  $10 \times 100$  (10 реда  $\times$  100 стълба) са вписани степени на двойката, както е показано на фигураната.

- Да се намери сборът на числата в таблицата.
- От таблицата по случаен начин е зачеркнато число. Каква е вероятността това число да е точен квадрат?

**Решение.** а) Събираме числата по редове и от всеки сбор изнасяме най-ниската степен на двойката:



1	2	4	8	...
2	4	8	16	...
4	8	16	32	...
8	16	32	64	...
...	...	...	...	...

$$S = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99}) + (2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}) + (2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{101}) + \dots + (2^9 + 2^{10} + 2^{11} + \dots + 2^{108}) = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{99}) \cdot (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9).$$

Двета множителя са сума на геометрична прогресия с първи член 1 и частно 2. Тогава

$$S = 1 \cdot \frac{2^{100} - 1}{2 - 1} \cdot 1 \cdot \frac{2^{10} - 1}{2 - 1} = (2^{100} - 1)(2^{10} - 1).$$

- В таблицата има написани 1000 числа. Точни квадрати са всички четни степени на 2. На първия ред има 50 четни степени на 2:  $2^0 = 1, 2^2, \dots, 2^{98}$ , на втория има още 50:  $2^2, 2^4, \dots, 2^{100}$  и т.н. до последния 10-и ред:  $2^{10}, 2^{12}, \dots, 2^{100}$ . Така броят на четните степени  $10 \cdot 50 = 500$ . Търсената вероятност е  $\frac{500}{1000} = 0,5$ .

3. Дадени са шест реални числа  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ .

a) Да се докаже, че уравнението

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_6) + (x - a_2)(x - a_5) + (x - a_3)(x - a_4) = 0$$

има два различни реални корена.

б) Да се докаже неравенството  $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6)^2 > 12(a_1 a_6 + a_2 a_5 + a_3 a_4)$ .

Решение. а) Имаме

$$f(a_3) = (a_3 - a_1)(a_3 - a_6) + (a_3 - a_2)(a_3 - a_5) + (a_3 - a_3)(a_3 - a_4).$$

Поради зададената наредба на числата  $f(a_3) < 0$ . По същия начин можем да определим знака на  $f(a_6) = (a_6 - a_1)(a_6 - a_6) + (a_6 - a_2)(a_6 - a_5) + (a_6 - a_3)(a_6 - a_4)$  и да установим, че  $f(a_6) > 0$ . Тъй като  $f(x)$  е квадратна функция от  $f(a_3) < 0$  и  $f(a_6) > 0$  следва твърдението в а).

б) Неравенството следва от това, че дискарица нантата на  $f(x) = 0$  трябва да е положителна.

**НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА  
ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ  
И ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ,  
Ловеч, 2008**

12. КЛАС

1. а) Да се реши уравнението  $(y-1)^3 + (y+1)^3 = \frac{7}{2}y^3$ .

б) Да се намери броят на решенията на уравнението

$$(x^2 - x + 1)^3 + (x^2 + x + 1)^3 = a(x^2 + 1)^3$$

в зависимост от стойностите на реалния параметър  $a$ .

Решение. а) С помощта на формулите за съкратено умножение даденото уравнение се опростява до  $2y^3 + 6y = \frac{7}{2}y^3$ , откъдето  $y^3 - 4y = 0$ , т.e.  $y(y-2)(y+2) = 0$ . Следователно корените на уравнението са числата  $-2, 0, 2$ .

б) Числото 0 е корен на уравнението при  $a = 2$ . Нека  $x \neq 0$ . Разделяме двете страни на уравнението на  $x^3$  и получаваме  $\left(x + \frac{1}{x} - 1\right)^3 + \left(x + \frac{1}{x} + 1\right)^3 = a\left(x + \frac{1}{x}\right)^3$ . Полагаме  $x + \frac{1}{x} = y$ ,  $|y| \geq 2$  и получаваме уравнението във вида  $(y-1)^3 + (y+1)^3 = ay^3$ . По подобен на а) начин го свеждаме до  $y((a-2)y^2 - 6) = 0$  и тъй като  $|y| \geq 2$ , то  $y \neq 0$  и остава възможността  $(a-2)y^2 - 6 = 0$ . При  $a-2 < 0$  уравнението няма решение, а при  $a > 2$  корените са  $y = \pm\sqrt[3]{\frac{6}{a-2}}$ . За да доведем тези корени до корени на даденото уравнение стойностите на параметъра трябва да се такива, че  $\frac{6}{a-2} \geq 4$ , т.e.  $2 < a \leq \frac{7}{2}$ .

Окончателно: при  $a < 2$  и  $a > \frac{7}{2}$  уравнението няма решение, при  $a = 2$  има 1 корен, при  $a = \frac{7}{2}$  има 2 корена и при  $2 < a < \frac{7}{2}$  уравнението има 4 реални корена.

2. Даден е правотъгълният триъгълник  $ABC$  с хипотенуза  $AB$ . Допирателната в точка  $C$  към описаната около триъгълника  $ABC$  окръжност пресича окръжностите с диаметри  $AC$  и  $BC$  съответно в точки  $Q$  и  $P$ .

а) Да се изразят дълчините на отсечките  $AQ$ ,  $PQ$  и  $BP$  чрез дълчините на страните  $AB = c$ ,  $BC = a$  и  $CA = b$  на триъгълника.

б) Ако лицето на триъгълника  $ABC$  е равно на 1 и периметърът на четириъгълника  $ABPQ$  е  $5\sqrt{2}$ , да се намерят острите ъгли на триъгълника  $ABC$ .

Решение. а) Тъй като  $\angle CPB = \angle CQA = 90^\circ$ ,  $\angle PCB = \angle CAB$  и  $\angle QCA = \angle CBA$  (периферен и вписан ъгъл), то  $\triangle ACQ \sim \triangle ABC$  и  $\triangle BPC \sim \triangle BCA$ .

Следователно  $\frac{AQ}{AC} = \frac{CQ}{BC} = \frac{AC}{AB}$  и  $\frac{BP}{BC} = \frac{CP}{AC} = \frac{BC}{AB}$ .

Оттук  $AQ = \frac{AC^2}{AB} = \frac{b^2}{c}$ ,  $CQ = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{ab}{c}$ ,  $BP = \frac{BC^2}{AB} = \frac{a^2}{c}$  и  $CP = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{ab}{c}$ .

Следователно  $AQ = \frac{b^2}{c}$ ,  $PQ = \frac{2ab}{c}$  и  $BP = \frac{a^2}{c}$ . От правоъгълните триъгълници  $APQ$  и  $BPQ$  намираме  $AP = \frac{b}{c} \sqrt{b^2 + 4a^2}$  и  $BQ = \frac{a}{c} \sqrt{a^2 + 4b^2}$ .

б) Нека  $\Pi$  е периметърът на  $ABPQ$ .

$$\text{Тогава } \Pi = AB + BP + PQ + QA = c + \frac{a^2 + b^2 + 2ab}{c}.$$

$$\text{Тъй като } c^2 = a^2 + b^2 \text{ и } 2S = ab (\text{ } S_{ABC} = S), \text{ то } \Pi = c + \frac{c^2 + 2ab}{c} = 2c + \frac{4S}{c}.$$

При  $\Pi = 5\sqrt{2}$  и  $S = 1$  имаме  $5\sqrt{2} = 2c + \frac{4}{c}$ , откъдето  $2c^2 - 5\sqrt{2}c + 4 = 0$ . Решенията на това уравнение са  $c_1 = 2\sqrt{2}$  и  $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Тъй като  $c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab = 4$ , то  $c \geq 2$ , така че само  $c_1$  удовлетворява условието. Ако  $\angle CAB = \alpha$ ,  $S = \frac{1}{2}c \cos \alpha \cdot c \sin \alpha = \frac{1}{4}c^2 \sin 2\alpha$ .

Оттук имаме  $1 = 2 \sin 2\alpha$ , т.e.  $\sin 2\alpha = \frac{1}{2}$ , откъдето  $2\alpha = 30^\circ$  или  $2\alpha = 150^\circ$ . Следователно острите ъгли на триъгълника  $ABC$  са  $15^\circ$  и  $75^\circ$ .

3. Основата  $ABCD$  на права призма  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с околен ръб  $AA_1 = b$  е ромб със страна  $AB = a$  и  $\angle DAB = \alpha$ . Да се намери:

а) разстоянието от върха  $B_1$  до равнината  $ACD_1$ ;

б) отношението  $\frac{AB}{AA_1}$ , ако  $\llbracket (ACD_1), (CDD_1 C_1) \rrbracket = 45^\circ$  и  $\angle D_1 A B = 60^\circ$ .

Решение. а) Нека  $B_1 H \perp (ACD_1)$ . Тъй като  $ABCD$  е ромб, то  $BD \perp AC$ . Понеже призмата е права, то  $BB_1 \perp (ABCD)$  и  $BB_1 \perp AC$ . Тогава  $(BDD_1 B_1) \perp AC$ , т.e.  $(BDD_1 B_1) \perp (ACD_1)$ . Следователно  $B_1 H$  лежи в равнината  $(BDD_1 B_1)$ . Понеже  $(BDD_1 B_1) \cap (ACD_1) = OD_1$ , то  $B_1 H \perp OD_1$ .

В правоъгълника  $BDD_1 B_1$  имаме  $\triangle D_1 B_1 H \sim \triangle O D_1 D$ , откъдето  $B_1 H = \frac{DD_1 \cdot D_1 H}{OD_1}$ . От правоъгълния  $\triangle ODA$  намираме  $OD = a \sin \frac{\alpha}{2}$  и тогава  $OD_1 = \sqrt{b^2 + a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$ .

$$\text{Окончателно } B_1 H = \frac{2ab \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{b^2 + a^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}}.$$

б) Нека  $AP \perp (CDD_1 C_1)$ . Понеже  $(ABC) \perp (CDD_1)$ , то  $P$  лежи на  $CD$ . Нека  $PQ \perp CD_1$ .

Тъй като  $(CDD_1 C_1) \cap (ACD_1) = CD_1$ , то  $\llbracket (ACD_1), (CDD_1 C_1) \rrbracket = \angle PQA$ . Тъй като  $\angle PDA = \angle DAB$ , то  $PA = a \sin \alpha$ ,  $DP = a \cos \alpha$  и  $PC = a(1 + \cos \alpha)$ . От правоъгълния  $\triangle PCQ$  намираме  $PQ = PC \sin(\angle PCQ) = PC \frac{DD_1}{CD_1}$ ,  $PQ = \frac{a(1 + \cos \alpha)b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ .

$$\text{Тогава } \operatorname{tg}(\angle PQA) = \frac{AP}{PQ} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b} \cdot \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

При  $k = \frac{a}{b}$ ,  $\angle PQA = 45^\circ$  и  $\angle DAB = 60^\circ$  имаме

$$1 = \sqrt{k^2 + 1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ откъдето } k = \sqrt{2}.$$

