НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ
ЛОВЕЧ – 2006

Примерни решения на задачите

ДВАНАДЕСЕТИ КЛАС

1. Нека a и b са положителни числа. Да се докаже, че уравнението $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x+b}=0$ има реални корени и единият от тях е в интервала $\left(\frac{a}{3};\frac{2a}{3}\right)$, а другият е в интервала $\left(-\frac{2b}{3};-\frac{b}{3}\right)$.

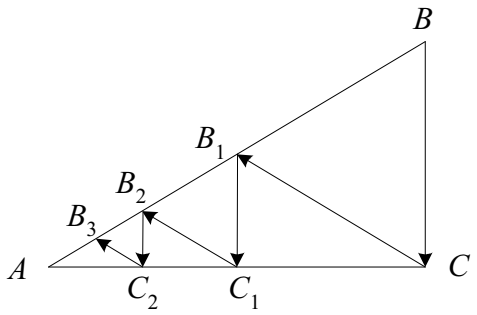
Решение. Привеждаме уравнението във вида $3x^2+2(b-a)x-ab=0$.

Означаваме $f(x)=3x^2+2(b-a)x-ab$. Пресмятаме $f\left(\frac{a}{3}\right)=-\frac{a^2}{3}-\frac{ab}{3}<0$ и $f\left(\frac{2a}{3}\right)=\frac{ab}{3}>0$, което показва, че уравнението $f(x)=0$ има корен в интервала $\left(\frac{a}{3};\frac{2a}{3}\right)$. От друга страна $f\left(-\frac{b}{3}\right)=-\frac{b^2}{3}-\frac{ab}{3}<0$ и $f\left(-\frac{2b}{3}\right)=\frac{ab}{3}>0$, което показва, че уравнението $f(x)=0$ има корен в интервала $\left(-\frac{2b}{3};-\frac{b}{3}\right)$.

2. Бръмбар се движи от точка B към точка A между раменете на острия ъгъл BAC по следния начин: първо от B перпендикулярно към рамото AC, оттам до средата B_1 на отсечката AB, отново перпендикулярно към рамото AC и от него към средата B_2 на отсечката AB_1, и т.н. (виж фигурата).

а) Да се намери дължината на пътя, който ще измине бръмбарът, ако $AC=BC=1$.

б) Нека $BAC=\alpha$. Да се намерят стойностите на α, за които пътят, изминат от бръмбара, е по-малък от периметъра на триъгълника ABC.



Решение. Да означим с C_1, C_2 ,... точките от ръба AC, до които стига бръмбарът. Тогава пътят S на бръмбара е равен на

$$S=(BC+B_1C_1+B_2C_2+...)+(CB_1+C_1B_2+C_2B_3+...)$$

Нека $AC=b$, $BC=a$ и $AB=c$. Тъй като B_1C_1 е средна отсечка в ΔABC, то $B_1C_1=\frac{1}{2}a$; B_2C_2 е средна отсечка в ΔAB_1C_1, то $B_2C_2=\frac{1}{2}B_1C_1=\frac{1}{4}a$ и т.н. От друга страна $AB_1=CB_1=\frac{1}{2}c$, $AB_2=C_1B_2=\frac{1}{4}c$ и т.н. Тогава

math-bg.com

$S=\left(a+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}a+...\right)+\left(\frac{1}{2}c+\frac{1}{4}c+\frac{1}{8}c+...\right)=a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...\right)+\frac{c}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...\right)$ или $S=\left(a+\frac{c}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...\right)$. Но $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...$ е безкрайна геометрична прогресия с частно $\frac{1}{2}$. Следователно $S=\left(a+\frac{c}{2}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2a+c$.

а) При $AC=BC=1$, $AB=\sqrt{2}$ и $S=2+\sqrt{2}$.

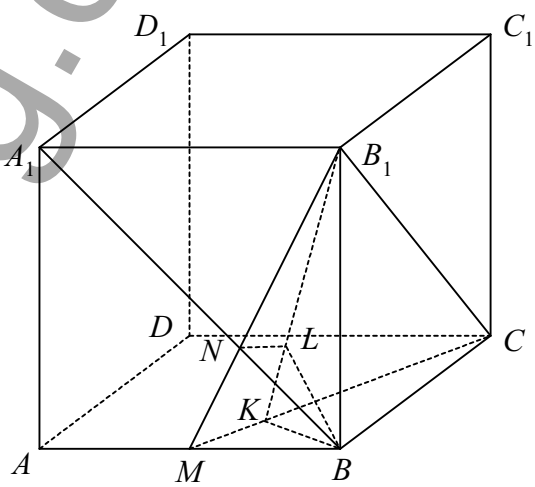
б) Тъй като $P_{ABC}=a+b+c$, то $S<P_{ABC}$ $\Leftrightarrow$ $2a+c<a+b+c$ $\Leftrightarrow a<b$. Но $\mathrm{tg}\alpha=\frac{a}{b}$, откъдето следва, че $S<P_{ABC}$ при $\mathrm{tg}\alpha<1$ или $\alpha<45^\circ$.

3. Даден е куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка M е от ръба AB. Равнината MCB_1 сключва с равнината $ABCD$ ъгъл φ, такъв че $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{6}}$. Да се намери:

а) Отношението AM:BM.

б) Косинусът на ъгъла между правата BA_1 и равнината MCB_1.

Решение: Нека ръбът на куба има дължина 1.



а) Построяваме $BK\perp MC$. Тъй като $BB_1\perp(ABCD)$, то от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $\varphi=BKB_1$. Тогава, ако $BK=x$, от правоъгълния триъгълник BKB_1 намираме $KB_1=\sqrt{1+x^2}$, $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$, откъдето $x=\frac{1}{\sqrt{5}}$. Нека $MB=y$. От правоъгълния триъгълник BMC намираме $MC=\sqrt{1+y^2}$, $\sqrt{1+y^2}\frac{1}{\sqrt{5}}=y$, откъдето $y=\frac{1}{2}$. Следователно AM:$BM=1$.

б) Нека BA_1 и MB_1 се пресичат в точка N и L е ортогоналната проекция на B в равнината MCB_1. Тогава $[BA_1,(MCB_1)]=BNL=\theta$. Тъй като $(BKB_1)\perp(MCB_1)$, то $L\in KB_1$ и $L\perp KB_1$. От правоъгълния триъгълник BKB_1 намираме $BL=KB\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$. От MBN B_1A_1N имаме $BN=\frac{1}{3}BA_1=\frac{\sqrt{2}}{3}$. Тогава $\sin\theta=\frac{BL}{BN}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\cos\theta=\frac{1}{2}$.

math-bg.com