Шестнадесети турнир “Черноризец Храбър”
Отговори и решения за 9-10 клас

1. Кое от изписаните с римски цифри числа е равно на 2007?

А) 1997 Б) 2007 В) 2003 Г) 1992 Д) никое от тези

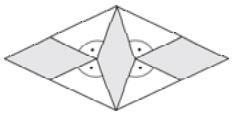
Отговор Б.

2. Кое от следните неравенства е достатъчно условие, за да твърдим, че $x > 1$?

А) $x^5 > x^3$ Б) $x^5 > x^4$ В) $x^6 > x^4$ Г) $x^6 > x^5$ Д) никое от тези

Отговор Б. Отговори (В) и (Г) са възможни при $x = -2$, а (А) при $x = -0,1$. (Б) е възможно само при $x > 1$.

3. Ако трите затъмнени ромба на чертежа са еднакви, а отбелязаните ъгли са прави, то колко градуса е острият ъгъл на големия ромб, от който малките са част?



А) 30° Б) 45° В) 60° Г) друг определен ъгъл Д) ъгълът не е еднозначно определен

Отговор Б. Триъгълничетата, допълващи трите ромба до големия ромб, са равнобедрени и правоъгълни.

4. Колко са естествените числа от интервала $(x_2; x_1)$, където x_1 и x_2, $x_2 < x_1$, са корените на уравнението

$$x^2 - 2008x + 2007 = 0?$$

А) 2008 Б) 2006 В) 2004 Г) 2000 Д) никое от тези

Отговор Д. Корените са $x_1 = 2007$, $x_2 = 1$, а числата са 2005.

5. Четири от клетките трябва да се оцветят в 4 различни цвята, така че в таблицата

да няма съседни оцветени клетки. По колко начина може да стане това?

А) 24 Б) 48 В) 72 Г) 96 Д) 120

Отговор Д. Четири клетки се оцветяват в 4 цвята по $4! = 24$ начина. За тях имаме петте възможни позиции, показани отдясно.

*		*		*		*	
*			*		*		*
*		*			*		*
*		*		*			*
	*		*		*		*

6. Трапец с основи 12 и 18 е разделен от диагоналите си на четири триъгълника, два от които имат лица по 150. На колко е равно лицето на трапеца?

А) 525 Б) 575 В) 600 Г) 625 Д) никое от тези

Отговор Г. Останалите два триъгълника имат лица $\frac{2}{3} \cdot 150 = 100$ и $\frac{3}{2} \cdot 150 = 225$.

7. Дължината на правоъгълник била увеличена с $4x\%$ $(x > 0)$, а ширината била намалена с $3x\%$. Лицето на правоъгълника намаляло с 2%. На колко е равно x?

А) 12 Б) 15 В) 18 Г) 20 Д) никое от тези

Отговор Д. Имаме $(1+\frac{4x}{100})(1-\frac{3x}{100}) = 0,98$, откъдето $10000+400x-300x-12x^2 = 9800$ и $12x^2 - 100x - 200 = 0$. Щом $x > 0$, $x = \frac{1}{12}(50 + \sqrt{2500+2400}) = 10$.

8. Средното аритметично на 9 различни естествени числа е 9. На колко най-много може да е равно най-голямото от тях?

А) 36 Б) 45 В) 54 Г) 63 Д) никое от тези

Отговор Б. Сборът на числата е 81, а останалите осем имат сбор поне $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$. Остава $81 - 36 = 45$.

9. Волейболен мач приключва, когато един от двата отбора е победил в три от геймовете. На светлинното табло се показва резултатът в геймове. Колко са всевъзможните различни показания на таблото за мачове, в които загубилият отбор не е повеждал в резултата нито веднъж? (Считайте, например, резултат $\boxed{1:0}$ за различен от $\boxed{0:1}$.)

А) 12 Б) 10 В) 8 Г) 6 Д) никое от тези

Отговор Б. В лявата таблица са показани възможните резултати, завършили с победа на домакина, а в дясната – броя на възможните развои на мача до този резултат.

		2:2	3:2
	1:1	2:1	3:1
0:0	1:0	2:0	3:0

		2	2
	1	2	2
1	1	1	1

Общо имаме $2(2+2+1) = 10$ развоя (заедно с тези, в които победител е гостът).

10. Отношението на катетите на правоъгълен триъгълник е k. На колко е равно отношението на проекциите им върху хипотенузата?

А) $\sqrt{k}$ Б) k^2 В) k^2+1 Г) $(k+1)^2$ Д) $\sqrt{k+1}$

Отговор Б. Нека катетите са a и b, проекциите им са a' и b', а хипотенузата е c. Тогава $a' = \frac{a^2}{c}$, $b' = \frac{b^2}{c} \Longrightarrow a' : b' = a^2 : b^2 = k^2$.

11. Ъгълът на правилен n-ъгълник е $170°$. На колко е равно n?

А) 17 Б) 34 В) 36 Г) 54 Д) 170

Отговор В. Ъгълът на правилен n-ъгълник е $\frac{n-2}{n}180°$. Следователно $170 = \frac{n-2}{n}180$.

12. Колко са триъгълниците с обиколка 600, чиито страни са естествени числа, пропорционални на някои три последователни естествени числа?

А) 6 Б) 8 В) 10 Г) 11 Д) 12

Отговор В. Страните са $k(n-1), kn, k(n+1)$, откъдето $3kn = 600$. Броят на триъгълниците е равен на броя на делителите n на $200 = 2^3 \cdot 5^2$, за които $n > 2$, т.е. на 11. ($n = 1$ се изключва от неравенството на триъгълника.)

13. Колко са естествените числа, по-малки от 2007, които не се делят нито на 3, нито на 4, нито на 5?

А) 803 Б) 836 В) 869 Г) 436 Д) никое от тези

Отговор А. Виж задача 25 за 7-8 кл.

14. За пътуването си от C до A в понеделник шофьорът Ангел на колата a похарчил 56,16 лв. за бензин А95. Разстоянието от C до A е 400 км и Ангел го изминал за 3 ч и 20 мин. Приблизително колко лева платил в петък за дизелово гориво шофьорът Бойко на колата b, за да отиде от C до B, ако разстоянието CB е 360 км, а Бойко го изминал за 3 ч и 36 мин. Освен това:

- един литър дизелово гориво струва 90% от цената на литър бензин А95;
- стандартно колата a изразходва 6 л бензин на 100 км при скорост 90 км/ч;
- колата b изразходва 4,5 л дизелово гориво на 100 км при скорост 80 км/ч;
- разходът на всяка от колите се увеличава с по x% при x км/ч увеличение на скоростта над съответната скорост, при която е определен разходният стандарт;
- от понеделник до петък горивата поскъпнали с 5 %.

А) 37 Б) 35 В) 33 Г) 31 Д) по-малко от 31

Отговор В. Виж задача 22 за 7-8 кл.

15. Папката с любими песни в компютъра на Пролет съдържа 120 записа: $p1.mp3$, $p2.mp3$, $p3.mp3$,...$p120.mp3$, подредени по име. Песните са по 7 минути. Пролет пуснала първата песен и излязла. Коя песен е чула Пролет, когато след два часа се върнала при компютъра?

А) $p17$ Б) $p18$ В) $p108$ Г) $p114$ Д) друга някоя

Отговор Г. Виж задача 24 за 7-8 кл.

16. От квадратна мрежа е изрязана таблица 8×8. Които и три единични квадратчета да се изрежат от таблицата, останалата част може да се разреже по линиите на мрежата на n правоъгълника. Колко най-малко е n?

А) 7 Б) 8 В) 9 Г) 10 Д) повече от 10

Отговор Г. След изрязването на първото единично квадратче, останалата част от таблицата винаги може да се разреже на 4 правоъгълника. Ако това квадратче е вътрешно, останалата част не може да се разреже на по-малко от 4 правоъгълника.

Следващото квадратче попада в един от получените правоъгълници и разсъждаване аналогично. Получаваме, че n е най-малко $4 + 2 \cdot 3 = 10$.

17. За четириъгълника $ABCD$ е дадено $\sphericalangle ABC = 70°$, $\sphericalangle CBD = 25°$, $\sphericalangle ACD = 45°$. На колко е равен $\sphericalangle CAD$?

А) 20° Б) 25° В) 30° Г) 45° Д) 60°

Отговор Б. Тъй като $\sphericalangle ABD = 70° - 25° = 45° = \sphericalangle ACD$, то $ABCD$ е вписан. Тогава $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = 25°$.

18. Какво ще се отпечата в резултат от изпълнението на процедурата

```
a:=1;  n:=0
  докато  a>0.001  изпълнявай
    (a:=a/2,  n:=n+1)
  отпечатай n
```

А) 0.001 Б) 0.002 В) 10 Г) 9 Д) нещо друго

Отговор В. При изпълнението на n цикъла имаме $a = \dfrac{1}{2^n}$. Процедурата спира на 10-я цикъл и отпечатва стойността на n.

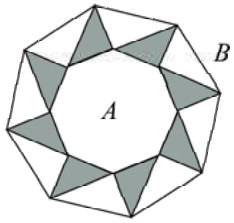
19. Кой е авторът на кодирания по-долу откъс? (Пунктуацията не е кодирана.)

```
Kdijdkq lqeqw - pqiqo rahwqq,
alqavr fxirmsj ilfvcj kqxqiqk;
hfwd adtbpr, lsjcw mflqq,
Xdyudkcj mqq ndzvbtud mqiqk!
```

А) Иван Вазов Б) Добри Чинтулов В) Христо Ботев
Г) Пейо Яворов Д) никой от тях

Отговор В. Виж задача 18 за 7-8 кл.

20. На страните на правилен осмоъгълник A са залепени равнобедрени правоъгълни триъгълнци, както е показано на чертежа.



Ако се свържат последователно върховете на триъгълниците, които не са върхове на A, се получава осмоъгълник B. Колко пъти лицето на B е по-голямо от лицето на A?

А) 1,5 Б) $\sqrt{3}$ В) 2 Г) 3 Д) 4

Отговор Г. Нека страната на A е a. Лесно се вижда, че B е правилен осмоъгълник, чиито страни са хипотенузи в правоъгълни триъгълници с катети a и $a\sqrt{2}$, т.е. са равни на $a\sqrt{3}$. Следователно лицето на B е 3 пъти по-голямо от лицето на A.

21. В куб с ръб 10 е пробит тунел с квадратно сечение, така че всяка стена на тунела е успоредна на някоя стена на куба. Числената стойност на обема и пълната повърхнина на полученото тяло са равни. Намерете тази стойност.

А) 625 Б) 650 В) 675 Г) 725 Д) никое от тези

Отговор Д. Нека x е страната на квадрата, който е напречното сечение на тунела. Имаме $1000 - 10x^2 = 600 - 2x^2 + 40x$. Оттук $0 = 8x^2 + 40x - 400$, $x^2 + 5x - 50 = 0$, чиито корени са $x = 5$ и $x = -10$. Сега обемът е $1000 - 250 = 750$.

22. Функцията $f(x)$ удовлетворява равенството
$f(x) + 2f(-x) = 3 - 2x \quad \forall x \in (-\infty; +\infty)$.
На колко е равно $f(2007)$?

А) -4011 Б) 4015 В) 2008 Г) 2004 Д) -2011

Отговор Б. $f(x) = 2x + 1$, което се намира от системата
$f(x) + 2f(-x) = 3 - 2x, \quad f(-x) + 2f(x) = 3 + 2x.$

23. Колко са правилните многоъгълници, чиито мерки на ъглите в градуси са цели числа?

А) не повече от 10 Б) между 11 и 20

В) между 20 и 30 Г) между 30 и 50 Д) повече от 50

Отговор В. Ъгълът на правилен n-ъгълник е $\frac{n-2}{n}180°$. Числата n и $n-2$ са взаимнопрости, когато n е нечетно и имат НОД 2, когато n е четно. Следователно n трябва да е нечетен делител на 180 или четен делител на 360, т.е. делител на 360, по-голям от 2. Понеже $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, делителите на 360 са $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$, а тези, които са по-големи от 2, са 22.

24. За четириъгълника $ABCD$ е дадено $AB = 7$, $BC = 1$, $CD = 4$ и $AC \perp BD$. На колко е равна AD?

А) 5 Б) 6 В) 7 Г) 8 Д) $\sqrt{7}+3$

Отговор Г. Ако $O = AC \times BD$, то

$OA^2 + OB^2 = 49, \quad OB^2 + OC^2 = 1, \quad OC^2 + OD^2 = 16, \Longrightarrow$

$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 65, \Longrightarrow OA^2 + OD^2 = 65 - 1 = 64 \Longrightarrow AD^2 = 64.$

25. Колко са подмножествата на множеството

$\{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots;\ 2007\}$

сборът от елементите на всяко от които е 2015021?

А) не повече от 5 Б) между 6 и 10 В) между 11 и 20

Г) между 20 и 100 Д) повече от 100

Отговор А. Понеже $1 + 2 + 3 + \cdots + 2007 = 2015028$, описаните подмножества се получават, като от даденото множество се махнат числа, чиито сбор е 7.

26. Ако за функцията f и за всяка четворка реални числа x, y, z, t е изпълнено условието

$f(x,y,z) = f(t,x,y) + f(t,y,z) + f(t,z,x)$,

то колко от равенствата

I. $f(x,y,z) = f(y,z,x) = f(z,x,y)$

II. $f(x,x,x) = 0$

III. $f(x,x,z) = 0$

IV. $f(x,y,z) = -f(x,z,y)$

са изпълнени при всеки избор на x, y, z?

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) 4

Отговор Д. Равенството *I.* следва директно от условието. Равенството *II.* се получава от условието при $x = y = z = t$.

От условието при $x = y$ и $z = t$ следва

$$f(x,x,z) = f(z,x,x) + f(z,x,z) + f(z,z,x).$$

От верността на *I.* имаме $f(x,x,z) = f(z,x,x)$ и $f(z,x,z) = f(z,z,x)$; така от горното равенство се получава $f(z,z,x) = 0$, еквивалентно на *III.*

От условието при $z = x$ получаваме

$$f(x,y,x) = f(t,x,y) + f(t,y,x) + f(t,x,x).$$

От верността на *III.* имаме $f(t,x,y) + f(t,y,x) = 0$, еквивалентно на *IV.*

Такава функция съществува, например константата 0.

27. Окръжност е разбита на 47 дъги от 20 сини и 27 червени точки. На дъга със сини краища се записва 4, на дъга с червени краища се записва 9 и на дъга с разноцветни краища се записва 6. Колко са възможните произведения на всички записани числа?

А) 1 Б) 7 В) 47 Г) 48 Д) никое от тези

Отговор А. Ще покажем, че произведението на записаните числа не се променя, когато две съседни разноцветни точки си разменят местата:

— в случаите $b\ r \leftrightarrow b\ b$ и $r\ r \leftrightarrow b\ r$ това е очевидно;

— при разместване $b\ r \leftrightarrow b\ r$ се получава $b\ b\ r\ r$ отново с произведение 6^3;

— също от $r\ r \leftrightarrow b\ b$ се получава $r\ b\ r\ b$ със същото произведение.

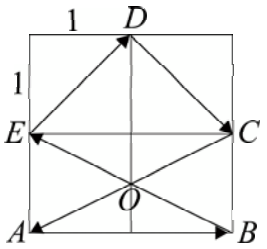
Тъй като с размествания от този вид от кое да е разположение на точките може да се получи всяко друго, ясно е че произведението на записаните числа не зависи от подредбата на точките.

28. Една мравка, снабдена с черна боя, пълзи по ръбовете на бяла правилна четириъгълна пирамида. Всеки от тези ръбове е с дължина 1 м. Каква е дължината на най-краткия път, който може да измине мравката, за да боядиса всички ръбове, без да цапа останалата повърхност на пирамидата?

А) 11 м Б) 10 м В) 9 м Г) 8 м Д) никой от тези

Отговор В. Във всеки върх на основата се събират нечетен брой ръбове, така че поне един от ръбовете трябва да бъде преминат двукратно. Това прави общия път поне 9 м. Ако пирамидата е $VABCD$, един такъв път е $ABCDAVBCVD$.

29. Точките A, B, C, D и E на чертежа са върхове на квадратна мрежа. Разглеждаме ориентираните пътища, които обхождат по веднъж всяка точка. На чертежа е показан пътят $M = \{A \to B \to E \to D \to C \to A\}$.



Характеристика σ на пътя се дефинира, като от сбора на лицата на частите, които пътят обхожда по посока на часовниковата стрелка, се извади сборът на лицата на обходените в обратна посока части. Например, $\sigma(M) = S_{EDCO} - S_{AOB} = 1$.

На колко е равно $\sigma(N)$, където

$N = \{A \to C \to B \to D \to E \to A\}$.

А) -1 Б) $-1,5$ В) 1 Г) $1,5$ Д) никое от тези

Отговор Б. Непосредствено се вижда, че

$$\sigma(N) = -S_{ABDE} + S_{ABC} = -S_{ABCDE} + S_{BCD} + S_{ABC} = -\frac{3}{2}.$$

30. Колко са двойките естествени числа $(m;n)$, за които $m^3 + n^3 = (m+n)^2$?

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) повече от 3

Отговор Г. Съкращаваме на $m+n$ и получаваме $m^2 - nm + n^2 - m - n = 0$. Последното разглеждаме като квадратно уравнение относно m. Дискриминантата $D(n) = -3n^2 + 6n + 1$ е неотрицателна само при $n = 1$ и $n = 2$. Това ни дава $(m;n) \in \{(1;2),\ (2;1),\ (2;2)\}$.