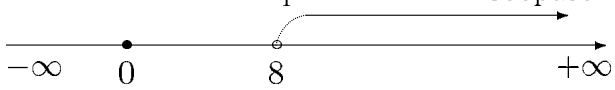
Шестнадесети турнир “Черноризец Храбър”

Отговори и упътвания за 11-12 клас

1. Кое от следните неравенства е достатъчно условие, за да твърдим, че $x > 1$?
А) $x^7 > x^4$ Б) $x^7 > x^5$ В) $x^8 > x^4$ Г) $x^6 > x^5$ Д) никое от тези

Отговор А. Виж задача 2 за 9-10 кл.

2. Решенията на кое неравенство са изобразени на чертежа?



А) $\lg x > 8$ Б) $\log_2 \frac{1}{x} < -3$ В) $\log_4 \frac{1}{x} < -32$ Г) $\log_8 x \geq 1$ Д) никое от тези

Отговор Б. Равносилно е на $x > 2^3$.

3. Сборът на 334 последователни нечетни числа е $334 \cdot 336$. На колко е равно произведението на най-малкото и най-голямото измежду тези числа?
А) 671 Б) 2007 В) 3335 Г) 4655 Д) никое от тези

Отговор Б. Средното аритметично на първото и последното от тези числа е 336. Ако по-малкото от тези числа е 1, по-голямото е 671, но от 1 до 671 (включително) има 336 нечетни числа; ако по-малкото от тези числа е 3, по-голямото е 669, от 1 до 669 има 334 нечетни числа. Проверяваме $3 \cdot 669 = 2007$ (както и се очакваше).

4. Трапец с основи 12 и 18 е разделен от диагоналите си на четири триъгълника, два от които имат лица по 150. Намерете лицето на трапеца.
А) 600 Б) 625 В) 525 Г) 575 Д) никое от тези

Отговор Б. Виж задача 6 за 9-10 кл.

5. Ако $\sqrt{5x} + \sqrt{3y} = 21$ и $\sqrt{20x} - \sqrt{12y} = 18$, то $x + y =$
А) 54 Б) 57 В) 60 Г) 63 Д) никое от тези

Отговор Б. Делим второто условие на 2 и получаваме $\sqrt{5x} - \sqrt{3y} = 9$. Добавяме първото: $2\sqrt{5x} = 30$, $5x = 225$, $x = 45$; $\sqrt{3y} = 6$, $y = 12$.

6. В равнобедрен трапец е вписана окръжност. Намерете дължината на окръжността, ако основите на трапеца имат дължини 36 и 64.
А) 48π Б) 64π В) 72π Г) 96π Д) никое от тези

Отговор А. Прекарваме височините и получаваме два еднакви правоъгълни триъгълника с хипотенузи по 50 и катети по 14. Тогава по Питагор другите им катети (височините на трапеца) са по 48. Обиколката на окръжността е 48π.

7. Ако $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$, то $(3 + \sin x)^2 + (3 + \cos x)^2 =$
А) 16 Б) 20 В) 22 Г) 25 Д) никое от тези

Отговор В. $(3+\sin x)^2+(3+\cos x)^2 = 18+6(\sin x+\cos x)+\sin^2 x+\cos^2 x = 18+3+1 = 22.$

8. Кое е най-малкото от числата

А) $\sin 6$ Б) $\sin 6^\circ$ В) $(\sin 6)\%$ Г) $(\sin 6^\circ)\%$ Д) $\sin(6\%)$,

ако навсякъде процентите са от 1?

Отговор А.Само отговори А) и В) са отрицателни, но делението на 100 прави В) по-голям.

9. За $\triangle ABC$ е дадено $AB = 1$, $BC = \sqrt{2}$ и $\sphericalangle BCA = 30^\circ$. Колко градуса може да бъде $\sphericalangle BAC$?

А) 60° Б) 30° или 150° В) 36° или 72° Г) 45° или 135°

Д) няма такъв триъгълник

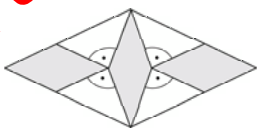
Отговор Г.От синусовата теорема имаме $\sin\sphericalangle BAC = \dfrac{BC}{AB}\sin\sphericalangle BCA = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

10. Дадени са окръжност и две пресичащи се хорди в нея. Пресечната точка дели едната хорда в отношение $2:3$, а другата – в отношение $3:4$. Намерете отношението на по-голямата към по-малката хорда.

А) $7:5$ Б) $49:25$ В) $9:8$ Г) $2:1$ Д) никое от тези

Отговор Д.Нека хордите AB и CD се пресичат в M, като $AM:BM = 2:3$, $CM:DM = 3:4$. Тогава $AM = \dfrac{2}{5}AB$, $BM = \dfrac{3}{5}AB$, $CM = \dfrac{3}{7}CD$, $DM = \dfrac{4}{7}CD$. От $AM\cdot BM = CM\cdot DM$ следва $\dfrac{6}{25}AB^2 = \dfrac{12}{49}CD^2$, а тогава $AB:CD = (5\sqrt{2}):7$.

11. Ако трите затъмнени ромба на чертежа са еднакви и всеки от тях има лице 1, то на колко е равно лицето на големия ромб, от който малките са част (отбелязаните ъгли са прави)?



А) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$ Б) $3+4\sqrt{2}$ В) $6+2\sqrt{2}$ Г) $3+\sqrt{2}$ Д) никое от тези

Отговор Д.Верният отговор е $3+2\sqrt{2}$. Ако a е страната на ромба, то лицето му е $1 = a^2\sin\dfrac{\pi}{4} \implies a^2 = \sqrt{2}$. Тогава лицата на триъгълничетата, допълващи трите ромба до големия ромб, са $\dfrac{1}{2}a^2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

12. Каква е вероятността случайно избрано естествено число, по-малко от 2007, да не е кратно нито на 3, нито на 4, нито на 5?

А) $\dfrac{804}{2007}$ Б) $\dfrac{1070}{2007}$ В) $\dfrac{803}{2006}$ Г) $\dfrac{985}{2006}$ Д) никое от тези

Отговор В.Търсената вероятност е $\dfrac{1070}{2006}$. Виж зад. 25 за 7-8 кл.

13. Най-рано след колко години записът на годината в двоична система ще се чете по един и същи начин отзад напред и отпред назад?

А) 4 Б) 8 В) 16 Г) 32 Д) никое от тези

Отговор Б. $2007_{(10)} = 11111010111_{(2)}$. Най-малкият палиндром след 11111010111 е 11111011111 и е с $1000_{(2)} = 2^3 = 8$ по-голям от 2007.

14. Една мравка, снабдена с черна боя, пълзи по ръбовете на бяла правилна петоъгълна пирамида. Всеки от тези ръбове е с дължина 1 м. Какъв е най-краткият път, който може да измине мравката, за да боядиса всички ръбове черни, без да цапа останалата повърхност на пирамидата?

А) 11 м Б) 12 м В) 13 м Г) 14 м Д) никой от тези

Отговор Б. Всички върхове са с нечетен брой ръбове, така че поне два от ръбовете трябва да бъдат преминати двукратно. Това прави общия път поне 12 м. Ако пирамидата е $VABCDE$, един такъв път е $ABCDEAVBCVDEV$.

15. Медианата през върха A в $\triangle ABC$ сключва със страните AB и AC ъгли, съответно равни на $30°$ и $45°$. На колко е равно отношението $AB : AC$?

А) $\sqrt{2}$ Б) $\sqrt{3}$ В) $\frac{3}{2}$ Г) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ Д) никое от тези

Отговор А. Ако M е средата на BC и $\sphericalangle AMB = \varphi$, то $\sin\sphericalangle AMC = \sin\varphi$. По синусовата теорема за $\triangle AMB$ и $\triangle AMC$ имаме

$$\frac{AB}{BM}\sin 30° = \sin\varphi = \frac{AC}{CM}\sin 45° \Longrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{\sin 45°}{\sin 30°} = \sqrt{2}.$$

16. Функцията $f(x)$ удовлетворява равенството

$$2f(x) - f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2+x-x^2}{x} \quad \forall x \in (-\infty;0)\cup(0;+\infty).$$

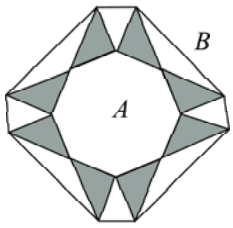
На колко е равно $f(2007)$?

А) $\frac{2006}{2007}$ Б) $\frac{2008}{2007}$ В) $\frac{2007}{2006}$ Г) $\frac{2007}{2008}$ Д) никое от тези

Отговор Б. $f(x) = \frac{x+1}{x}$, което се намира от системата

$$2f(x) - f(\frac{1}{x}) = \frac{2+x-x^2}{x}, \quad 2f(\frac{1}{x}) - f(x) = \frac{2x^2+x-1}{x}.$$

17. На страните на правилния осмоъгълник A са построени равнобедрени правоъгълни триъгълници, както е показано на чертежа.



Ако се свържат последователно върховете на триъгълниците, които не са върхове на A, се получава осмоъгълник B. На колко е равен периметърът на B, ако страната на A е 1?

А) $4\sqrt{10+\sqrt{2}}$ Б) $8\sqrt{2-\sqrt{2}}$ В) $16+8\sqrt{2}$ Г) $4\sqrt{14+\sqrt{2}}$ Д) никое от тези

Отговор А. Ако m и n са съответно голямата и малката страна на B, то

$m^2 = 4+2\sqrt{2}$, $n^2 = 2-\sqrt{2} \Longrightarrow$
$(m+n)^2 = 10+\sqrt{2} \Longrightarrow P_B = 4(m+n) = 4\sqrt{10+\sqrt{2}}$.

18. Ако a_n е цифрата на единиците на n^{2007}, то кое от числата

А) a_2 Б) a_3 В) a_4 Г) a_5 Д) a_6

е най-голямо?

Отговор А. $a_2 = 8$, $a_3 = 7$, $a_4 = 4$, $a_5 = 5$, $a_6 = 6$.

19. Колко са общите членове на аритметичните прогресии $\{1;\ 5;\dots\}$ и $\{2;\ 5;\dots\}$, които не надминават 2007?

А) не повече от 150 Б) между 150 и 170 В) между 170 и 200
Г) между 200 и 250 Д) повече от 250

Отговор Б. Общите членове са членовете на аритметичната прогресия $\{5;\ 17;\dots\}$. Броят им е $[(2007-5):12]+1$.

20. Колко са двойките естествени числа $(m;n)$, за които $m^3+n^3=(m+n)^2$?

А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3 Д) повече от 3

Отговор Г. Виж задача 30 за 9-10 кл.

21. В куб с ръб 10 е пробит тунел с квадратно сечение, така че всяка стена на тунела е успоредна на някоя стена на куба. Числените стойности на обема и пълната повърхнина на полученото тяло са равни. Намерете този обем.

А) 625 Б) 650 В) 675 Г) 725 Д) никое от тези

Отговор Д. Нека x е страната на квадрата, който е напречното сечение на тунела. Имаме $1000-10x^2 = 600-2x^2+40x$. Оттук $0 = 8x^2+40x-400$, $x^2+5x-50=0$, чиито корени са $x=5$ и $x=-10$. Сега обемът е $1000-250=750$.

22. Окръжност е разбита на 47 дъги от 20 сини и 27 червени точки. На дъга със сини краища се записва 4, на дъга с червени краища се записва 9 и на дъга с разноцветни краища се записва 6. Колко са възможните произведения на всички записани числа?

А) 540 Б) 48 В) 47 Г) 7 Д) никое от тези

Отговор Д. Ще покажем, че произведението на записаните числа не се променя, когато две съседни разноцветни точки си разменят местата:

— в случаите $b\ r \leftrightarrow b\ b$ и $r\ r \leftrightarrow b\ r$ това е очевидно;
— при разместване $b\ r \leftrightarrow b\ r$ се получава $b\ b\ r\ r$ отново с произведение 6^3;
— също от $r\ r \leftrightarrow b\ b$ се получава $r\ b\ r\ b$ със същото произведение.

Тъй като с размествания от този вид от кое да е разположение на точките може да се получи всяко друго, ясно е че произведението на записаните числа не зависи от подредбата на точките.

23. По случаен начин избираме подмножество на множеството $\{1;\ 2;\ 3;\ 4; \ldots;\ 2007\}$ което има 2005 елемента. Каква е вероятността сборът от елементите на такова подмножество да бъде 2 015 021?

А) $\frac{1}{671\,007}$ Б) $\frac{1}{4\,026\,042}$ В) $\frac{1}{17\,635\,421}$ Г) $\frac{1}{204\,261\,524}$ Д) никоя от тези

Отговор А. Всевъзможните подмножества с 2005 елемента са двуелементни допълнения до даденото множество. Те са $C_{2007}^2 = \frac{2007 \cdot 2006}{2} = 2007 \cdot 1003$. Понеже $1+2+3+\cdots+2007 = 2015028$, двуелементните допълнения трябва да имат сбор от елементите 7. Такива са три множества: $\{1;\ 6\}$, $\{2;\ 5\}$, $\{3;\ 4\}$. Търсената вероятност е $\frac{3}{2007 \cdot 1003}$.

24. На много дълга сламка кацнали скакалците A, B и C в този ред. От време на време някой скакалец прескача един свой съсед. Например, след първия скок е възможно само някое от двете разположения BAC (когато A прескача B или B прескача A) и ACB (когато C прескача B или B прескача C). Кое разположение НЕ може да се постигне с точно 2007 скока?

А) ACB Б) CBA В) BAC Г) CAB Д) всяко от изброените е възможно

Отговор Г. Възможните положения могат да се разделят в две групи: ABC, BCA, CAB и ACB, CBA, BAC. При всяко прескачане от първата група разположения се премнава във втората и обратно. Следователно след 2007 скока ще се получи разположение от втората група и CAB е невъзможно.

25. При въвеждането на коя от стойностите

А) 3 Б) 5 В) 8 Г) 13 Д) 21

в резултат от изпълнението на програмения фрагмент

```
въведи n
x := 0; y := −10; z := 0; h := 1/n
    докато y < z изпълнявай
        (x := x + h;   y := z;   z := −x² + 11x − 10;)
отпечатай y
```

ще бъде отпечатано най-голямо число?

Отговор В. Алгоритъмът пресмята стойностите на $-x^2+11x-10$, докато не бъде преминат максимумът на квадратния тричлен, който се достига за $x_0 = 5,5$. При четно n тази стойност за x се достига, а при нечетно се прескача.

26. В таблицата | | | | | | | | | четири от клетките са оцветени по случаен начин в синьо, зелено, червено и жълто, така че няма съседни оцветени клетки и са използвани и четирите цвята. Каква е вероятността първата (лявата) клетка да е синя?

А) $\frac{1}{4}$ Б) $\frac{1}{5}$ В) $\frac{1}{24}$ Г) $\frac{1}{120}$ Д) никоя от тези

Отговор Б. Първата клетка е оцветена с вероятност $\frac{4}{5}$ (виж зад. 5 за 9. кл.). Този цвят е син с вероятност $\frac{1}{4}$. Следователно търсената вероятност е $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$.

27. Ако a, b, c са положителни числа, кое от следните неравенства може да НЕ Е вярно?

А) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9$
Б) $a^2bc+b^2ca+c^2ab \leq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$
В) $(a^2+b^2+c^2)^2 \geq 3abc(a+b+c)$
Г) $\frac{2a}{b+c}+\frac{2b}{c+a}+\frac{2c}{a+b} \leq 3$
Д) $a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3 \leq a^6+b^6+c^6$

Отговор Г.(Г) не е вярно за $a = 2$, $b = c = 1$. (А) следва от неравенството между средно аритметично и средно хармонично. (В) следва от неравенството между средно аритметично и средно геометрично. (Б,Д) следват от класическото $bc+ca+ab \leq a^2+b^2+c^2$.

28. Правилен зар се хвърля три пъти. Получените точки са x, y, z (в този ред). Каква е вероятността да имаме $x < y < z$?

А) $\frac{1}{6}$ Б) $\frac{5}{54}$ В) $\frac{5}{27}$ Г) $\frac{4}{27}$ Д) никое от тези

Отговор Б.Вероятността да имаме три различни числа е $\frac{6\cdot5\cdot4}{6\cdot6\cdot6}$. В една шеста от тези случаи трите числа ще се появят в нарастващ ред: $\frac{5\cdot4}{6\cdot6\cdot6}=\frac{5}{54}$.

29. Кое от числата

А) 0 Б) 1 В) 5 Г) 100 Д) 100!

е най-добро приближение за резултата от изпълнението на следния програмен фрагмент:

$x := 1; y := 1;$
  `за` n `от 1 до 100 изпълнявай`
    $(x := x * n;\quad y := y * 5;\quad z := y/x;\quad n := n+1)$
`отпечатай` z

Отговор А.Алгоритъмът отпечатва стотния член на редицата $a_n = \frac{5^n}{n!}$, която е сходяща и има граница 0.

30. Определете автора на кодирания по-долу откъс, като знаете, че буквите от кирилицата в множеството {а, и, ъ} са кодирани с буквите {m, u, a} (редът не е непременно зададеният), а пунктуацията не е кодирана.

```
Qasus na by gy fivusu,
by j ikvenu qmvda qms,
qasus na by gy j fybesu,
ci tuj nole tu cdysms.
```

А) Иван Вазов Б) Добри Чинтулов В) Христо Ботев
Г) Пейо Яворов Д) Елисавета Багряна

Отговор А. Буквата "ъ" се появява често в пълния член, но не се появява като последна буква в дума. Това ни дава основание да определим съответствието ъ↔m. Пълният член ни подсказва и съответствието т↔s. Така за първата дума имаме възможностите *итат или *атит – втория вариант отхвърляме като много нетипичен. Сега вече не е трудно да разкрием куплета от "Де е България?"

Питат ли ме де зората,

ме й огряла първи път,
питат ли ме де й земята,
що най любя на светът.