Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

5 юни 2010 г.

ТЕМА за 11-12 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0 – 10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Уравнението $x^2-(a-5)x-a^2-5a-4=0$, в което a е реален параметър, има реални и различни корени x_1 и x_2. Най-малката стойност на израза $|x_1+1|+|x_2+2|$ е равна на:

A) 0 **B)** 5 **C)** $\sqrt{41}-1$ **D)** $2\sqrt{14}-1$ **E)** 7

2. Всеки ред на един театрален салон съдържа по 97 места. 2010 ученици от няколко училища отишли на театрално представление. Известно е, че от всяко училище на представлението отишли не повече от 30 ученици. Ако учениците от всяко училище е трябвало да седнат на един и същи ред, то колко реда най-малко в салона е трябвало да бъдат запазени предварително?

A) 22 **B)** 25 **C)** 27 **D)** 30 **E)** 32

3. Окръжностите $k_1(1\,cm)$, $k_2(2\,cm)$ и $k_3(3cm)$ се допират външно две по две. Да се намери радиусът на окръжността, до която трите дадени окръжности се допират вътрешно.

A) $\frac{6}{23}\,cm$ **B)** $3+2\sqrt{2}\,cm$ **C)** $4+2\sqrt{3}\,cm$ **D)** $6cm$ **E)** $7\frac{2}{3}\,cm$

4. Броят на естествените числа n, за които неравенството $\cos^n x+\sin^n x\ge\frac{2}{n}$ е вярно за всяко реално число x, е:

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

5. Нека M е множеството на всички естествени числа, в чийто запис няма повтарящи се цифри и не участват други цифри, освен 1, 3, 5 и 7. Сумата на всички числа от множеството M е равна на:

A) 58 928 **B)** 235 712 **C)** 118 384 **D)** 225 040 **E)** 117 856

6. Даден е ΔABC, в който $\angle A=10°$ и $\angle B=50°$. Върху страната AB са взети съответно точките M и N така, че $\angle ACM=10°$ и $\angle BCN=70°$. Да се намери отношението $MN:AB$.

7. Положителните числа a, b и c са такива, че $abc=1$. Да се докаже, че

$$(a+b)(b+c)(c+a)\ge 2(1+a+b+c).$$