ЗДРАВКА ПАСКАЛЕВА
МАЯ АЛАШКА

Математика

книга за учителя

7.

АрхИМЕД

ISBN: 978-954-779-083-4

СЪДЪРЖАНИЕ

1 НОВИЯТ УЧЕБНИК ПО МАТЕМАТИКА ЗА 7. КЛАС НА ИЗДАТЕЛСТВО „АРХИМЕД"

Авторски колектив*: Здравка Паскалева
проф. Георги Паскалев
Мая Алашка

СЪДЪРЖАНИЕ

* Новият учебник е преработено издание на учебника за 7. клас от 1996 г. със съавтор проф. Г. Паскалев (1932-2004).

ВЪВЕДЕНИЕ

При разработката на учебника по математика за 7. клас са спазени всички изисквания на новата програма на МОН към учебното съдържание, методиката на въвеждане на новите понятия и твърдения, към приложенията на математическите знания.

Всички уроци за нови знания в учебника са със заглавия, които следват последователността и точната формулировка, дадени в допълнението към програмата на МОН. Уроците, регламентирани от авторите, имат заглавия с допълнение: обобщение, упражнение, въведение, тест.

При разработката на темите в учебника:

- новите знания се въвеждат чрез определения, теореми и основни задачи;
- разработката на уроците подсказва вариант за методиката на преподаване;
- към всеки урок има достатъчен брой решени примери, чрез които са обхванати особеностите на темата, подсказват методи за решаване на задачи и осигуряват самостоятелното решаване на задачите след урока;
- задачите за самостоятелна работа са на две нива:
  първо ниво – задачи, подобни на решените в урока;
  второ ниво – задачи, в които се използват допълнителни знания и умения.

И в този учебник се използват “рубриките”:

“Обърнете внимание!” – пояснение и бележки към решение на задача;

“Бележка” – обяснение към основните знания;

“За любознателните” – интересни допълнения, исторически бележки;

“Запомнете!” – при систематизиране на основни знания.

Ръководната теза на авторите при написване на учебник е:

“Учебникът е предназначен главно за ученика!”

Учебникът е книга, която трябва да може да се чете от ученика, от която всеки ученик може самостоятелно да усвои знания за понятия, теореми и решаване на задачи (дори ако отсъства от училище).

Поради аксиоматичният подход при разработване на темите по геометрия (Т2, Т4, Т6), в помощ на учениците, всеки урок за нови знания завършва с “рубриката”

“В тази тема:”, в която се повтарят основните нови знания за съответния урок. Тези знания трябва да се помнят, усвоят и да се използват в следващото изложение при доказване на теореми и решаване на задачи.

В края на учебника е направена **система от основни понятия и твърдения в геометрията**, разработена в учебника, които могат да се ползват без доказателства.

Всички задачи за самостоятелна работа в учебника имат отговори, които са подредени по теми и номера на последните страници.

СТРУКТУРА НА УЧЕБНИКА

В програмата по математика за 7. клас са предвидени
34 учебни седмици × 4 учебни часа = 136 учебни часа
Учебникът съдържа 236 страници.
От разработените 112 урока в учебника:

- за нови знания – 64 урока (по програмата на МОН)
- за упражнения – 32 урока (по наша преценка)
- за обобщение на тема – 6 урока
- за преговор – 2 урока
- за проверка на знанията – 8 урока.

По теми различните видове уроци са:

Тема	Нов урок	Упражнение	Обобщение	Преговор	Тест	Общо часове
Начален преговор				1	1	2
Т1. Цели изрази	10	5	1		1	17
Т2. Основни геометрични фигури	9	4	1		1	15
Т3. Уравнения	13	4	1		1	19
Т4. Еднакви триъгълници	14	11	1		1	27
Т5. Неравенства	10	5	1		1	17
Т6. Успоредник. Трапец	8	3	1		1	13
Годишен преговор				1	1	2
Общо (учебни часа):	64	32	6	2	8	112

При разпределение на учебното време от 136 учебни часа, 112 часа са разработени в учебника, 6 часа са предвидени за подготовка, провеждане и поправка на две класни работи за първия и втория учебен срок и 18 часа са резервни.

В много от разработените уроци присъстват задачи с избираем отговор, които в изложението ще наричаме тестови задачи. В учебника е направен опит да се обучават учениците да решават такъв вид задачи. Началният и годишният преговор са разработени чрез избрани задачи, обхващащи основните знания, които се преговарят. Те се разискват в учебника като "тест с решения".

Много от темите, които са заглавие на уроци, обхващат голям обем учебен материал. В такива случаи темата се разглежда в два учебни часа, като във втория урок заглавието се повтаря с добавяне на "упражнение" или "продължение".

В учебника са разработени 4 урока, чрез които учениците се въвеждат в темите: "Основни геометрични фигури"; "Еднакви триъгълници"; "Задачи за построение" и "Неравенства".

Задачите в учебника

За часовете за проверка и оценка на знанията на учениците след всяка тема са предложени общо 6 теста, за входно ниво – 2 теста и за изходно ниво – 2 теста. В учебника има 10 теста, всеки от по 15 задачи. Всички задачи са с определени нива и се оценяват с 1, с 2 или с 3 точки.

Всеки тест има 5 задачи с 1 точка
7 задачи с 2 точки,
3 задачи с 3 точки,
т.е. максималният брой точки е 28.

Оценява се по формулата $2+\frac{1}{7}N$, където N е сборът от получените точки.

Важна особеност на тестовете в учебника: всеки тест съдържа 4 задачи със свободен отговор – 1 задача (1 точка), 2 задачи (с по 2 точки) и 1 задача (3 точки). Тези четири задачи могат да се оформят като тема за контролна работа и да се изиска подробно записване на решенията.

В учебника има 1169 задачи, от които:
393 задачи, решени в учебника и
773 задачи за самостоятелна работа.

Голяма част от задачите в учебника са формулирани като тестови задачи. Много от задачите имат повече от едно подусловие.

Всички задачи за самостоятелна работа в учебника са с дадени отговори (в края на учебника).

Важна особеност на учебника е системата от основни понятия и твърдения по геометрия, направена в края на учебника. Препоръчваме тази система да се използва за годишен преговор на геометричния материал.

2 УЧЕБНИ ПОМАГАЛА КЪМ УЧЕБНИКА ПО МАТЕМАТИКА ЗА 7. КЛАС

Към новия учебник по математика за 7. клас (издание 2008 г.) на издателство "Архимед" са разработени следните учебни помагала:

УЧЕБНИ ТЕТРАДКИ №1 И № 2

с автори Здравка Паскалева и Мая Алашка

В учебна тетрадка № 1 са разработени темите:

Входно ниво и Т1 Цели изтази
Т2 Основни геометрични фигури
Т3 Уравнения.

В учебна тетрадка № 2 са разработени темите:

Т4 Еднакви триъгълници
Т5 Неравенства
Т6 Успоредник. Трапец и Изходно ниво

Всяка тетрадка съдържа 64 страници. От тях:

- 2 страници с тест-контролни работи* за входно ниво (само в тетрадка № 1).
- 40 страници, всяка с № и заглавие на конкретен урок, която съдържа задачи върху урока. Тези страници могат да се използват за самостоятелна работа в часа или за домашна работа.
- 6 страници с комбинирани задачи върху тема (по 2 страници след всяка тема).
- 6 страници с примерни тематични контролни работи (по две след всяка от трите теми).
- 6 страници с обучаващи задачи, за подготовка за тест и контролна работа (по две след всяка от трите теми).
- 2 страници с тест-контролни работи за изходно ниво (само в терадка № 2).

Примерните контролни работи, дадени в учебните тетрадки, са тематични. Съставени са от 6 задачи, от които 4 са тестови с избираем отговор и 2 – със свободен отговор, за които се изисква подробно записване на решението. По този начин са съставени и примерните класни работи, дадени в тази книга. Първите 4 задачи се оценяват съответно с 1; 2; 2; 3 точки (общо 8 точки), а вторите две задачи – с по 4 точки (общо 8 точки). Максималният брой точки е 16 и оценката се формира по формулата $2+\frac{1}{4}N$, където N е броят на получените точки.

Общо в двете тетрадки са разработени 80 теми за самостоятелна работа, 12 теми с обобщителни задачи, 12 теста с обучаващ характер за подход към тест и решаване на тест и 16 тематични контролни работи.

Учебните тетрадки могат да се използват за текущ контрол и оценка на знанията на учениците.

* Всички контролни работи в тетрадките са съставени по подобие на примерните класни работи (виж стр. 42).

КНИГА ЗА УЧЕНИКА

с автори Здравка Паскалева, Мая Алашка, Райна Алашка

Книгата се състои от три части:

I част – Сборник от задачи

II част – Теми за изпит след 7. клас

III част – Тестове

Първата част съдържа задачи върху учебния материал, подредени тематично по реда на новата учебна програма за 7. клас.

Първата част съдържа задачи на три нива:

Ниво А – задачи, които са достъпни за всички ученици и осигуряват допълнителна самостоятелна работа по изучавания учебен материал.

Ниво Б – задачи, които осигуряват допълнителна самостоятелна работа за достигане на много добра и отлична подготовка по изучавания учебен материал. Тези задачи могат да се решават в часовете за ЗИП.

Ниво В – задачи за ученици, които проявяват интерес към математиката и ги подготвят за математически състезания.

Част от задачите от **Ниво Б** и задачите от **Ниво В** могат да се решават в часовете на свободно-избираемата подготовка (СИП).

Втората част съдържа 20 изпитни теми, които са съставени от по две задачи, всяка с по 2 подусловия. При решаване на задачите от тези теми препоръчваме да се изисква подробно писмено оформяне на решението.

Третата част съдържа 30 теста, от които

• 12 теста – 6 теми по 2 теста за всяка от шестте теми, разработени в учебника. Тестовете от № 1 до № 12 са за всички ученици и могат да се ползват през цялата учебна година за преговор или проверка на знанията по съответната тема.

• 12 теста – предназначени за всички ученици. Съдържанието им е по тематиката за 7. клас и позволява да се ползват през цялата учебна година, т.е. при тях се проверява новата тема и чрез част от задачите се поддържа и преговаря учебен материал от предходните теми.

• 6 общи теста, предназначени за ученици с интереси към математиката – могат да се ползват в часовете за СИП.

Всички тестове в третата част на Книгата за ученика са съставени от по 20 задачи, от които 16 са с избираем отговор, а 4 – със свободен отговор. Задачите в тестовете са с различна трудност: 6 задачи с по 1 точка, 8 задачи с по 2 точки и 6 задачи с по 3 точки. Общият брой точки е 40. Формулата, по която може да се постави числова оценка, е $2+\frac{1}{10}N$, където N е броят на получените точки.

ТЕСТОВЕ ПО МАТЕМАТИКА ЗА 7. КЛАС

с автори Здравка Паскалева, Мая Алашка, Райна Алашка

в четири книги: първа, втора, трета и четвърта част

Поредицата е сборници от тестове, всеки от по 50 въпроса. Структурата и задачите на всеки тест са съобразени с изпитните тестове на МОН, които се провеждат след 7. клас. Всеки тест съдържа задачи с различна трудност, които се оценяват с 1, 2 или 3 точки, като общият брой точки е 100. За всяка задача в таблица е посочена степента на трудност и е даден отговор.

Чрез тези тестове учениците се подготвят успешно да се представят на изпита-тест след завършен 7. клас.

Всяка от предложените четири книги има своите особености:

Първа книга съдържа 20 теста с по 50 задачи. Съдържанието на предлаганите тестове позволява използването им **през цялата учебна година**, защото са с "наслагване" на учебния материал: започва се с тематиката на 5. и 6. клас (Тест № 1 и № 2) и постепенно се добавят задачи от изучавания нов учебен материал, като се поддържат предходните теми.

Втора книга съдържа 20 теста с по 50 задачи. Съдържанието на предлаганите тестове обхваща целия учебен материал и е примерна тема за тренировъчен тест за изпит след 7. клас.

Книгата съдържа и 6 теста от националното състезание по математика за 7. клас – общински кръг, 18 февруари 2007 г.

Трета книга съдържа:

• изпитния тест на МОН след 7. клас (25 юни 2007 г.) с подробни решения на задачите от теста и критериите за оценка.

• 8 теста с по 50 задачи върху целия учебен материал с посочена степен на трудност и отговори. Предложените 8 теста се доближават до тенденциите, застъпени в изпитния тест на МОН.

• 66 решени нестандартни (логически и забавни) задачи, подобни на задачите от този характер, вече застъпени в тестовете. Разгледани са направленията: броене, тегления, преливания на течности, преместване на предмети, логически квадрати, логически уравнения, логически задачи.

Четвърта книга съдържа:

• 10 общи теста с по 50 задачи върху целия учебен материал – за подготовка на изпит.

• 69 решени нестандартни задачи, подобни на тези от тестовете, от следните направления: свойства на числата, принцип на Дирихле, диаграми на Вен, комбинаторика, математически ребуси, магически фигури.

• 4 теста от националното състезание по математика за 7. клас – общински кръг, 17 февруари 2008 г.

3 ОСОБЕНОСТИ НА ПРЕПОДАВАНЕ НА МАТЕМАТИКА В 7. КЛАС

ГЕОМЕТРИЯ

Главната особеност на геометричните знания в седми клас е поставяне началото на системно изграждане на планиметрията. Съществен елемент е формирането на понятие за АКСИОМА, ТЕОРЕМА и ДОКАЗАТЕЛСТВО, като се използва дедуктивният подход.

Реализацията на дедуктивното изграждане на планиметрията се илкюстрира върху основните фигури – триъгълник и успоредник. Най-съществените нови знания за триъгълника се постигат чрез теоремите (признаците) за еднаквост на два триъгълника.

Новият подход към математическите знания по геометрия определя и променя методиката на преподаване в седми клас.

Ще подчертаем, че дедуктивният подход в геометрията учи не само на математическо мислене, а развива интелекта на учениците: самостоятелно мислене и вземане на правилни решения, аргументираност и прецизност при изказване на съждения.

В седми клас в Т2 "Основни геометрични фигури" голяма част от знанията са понятия, които се изучават в предходните класове, но сега вече със съответни определения и твърдения, които се подреждат в система. За да се проведе успешно учебният процес, учителят трябва основно да познава базата, върху която ще гради системния курс по геометрия.

Геометрията в обучението на учениците до 7. клас

По индуктивен път учениците се запознават интуитивно с основните геометрични фигури:

Права, лъч, отсечка;

Мерни единици за дължина.

Сбор и разлика на две отсечки, пренасяне на отсечки (чертането и измерването се извършва с **линия с деления**)

Ъгъл, елементи, видове ъгли, градус (1°). Измерва се с **транспортир**, че правият ъгъл е 90°. В пети клас се въвежда понятието перпендикулярност ($a \perp b$). Тъп ъгъл – ъгъл, по-голям от правия; остър ъгъл – ъгъл, по-малък от правия.

Взаимно положение на две прави. Прави a и b, които не се пресичат, са успоредни ($a \parallel b$).

Триъгълник, видове триъгълници, елементи. Формула за лице на триъгълник. Мерни единици за лица.

Четириъгълник, правоъгълник, квадрат, успоредник, ромб, трапец – формули за лицата.

Окръжност и кръг – елементи. Формула за дължина на окръжност и лице на кръг.

Обръщаме внимание на два момента:

1. Измерването и чертането до 7. клас и в 7. клас до построителните задачи се извършва чрез линия с деления и транспортир (може да се използва и правият ъгъл на чертожния триъгълник).

2. Лице на геометрична фигура се въвежда като число, което показва от колко квадратни мерни единици се състои една фигура. Обем на геометрично тяло се въвежда като число, което показва от колко кубически мерни единици се състои едно тяло.

В заключение ще отбележим, че до седми клас учениците се запознават с геометричните обекти, като използват индуктивния подход, но:

– не са запознати с понятията: "определение", "теорема", "доказателство";
– не знаят какво е това да се докаже едно твърдение и да се реши една геометрична задача (освен да заместват числени стойности във формули и да пресмятат числови изрази);
– не знаят математически символи (освен $a \parallel b$, $a \perp b$);
– не знаят да оформят писмено решението на математическата задача с геометрично съдържание;
– не знаят да използват чертожни инструменти, да построяват фигури по дадени елементи или да ги пренасят в равнината.

Тези дадености могат фигуративно да се разгледат като условие на една математическа задача. Заключението на задачата е, че в часовете по геометрия,

при обучаване на учениците от седми клас, трябва:

– да попълним знанията им за геометричните обекти в равнината (дадени в програмата) и да ги изградим в система;
– да им покажем и да ги учим как се изказват определения на понятия, теореми, как се обосновават твърдения;
– да овладеят използването на въведената математическа символика и да умеят да решават и да записват решението на задача;
– да ги научим стъпка по стъпка при решаване на задачи да мислят чрез изказани определения и доказани твърдения;
– да добият трайни знания върху изказаните определения, признаци, свойства на взаимното положение на две прави в равнината, на фигурите триъгълник и четириъгълник (успоредници и трапец);
– да овладеят използването на чертожните инструменти линия без деления и пергел и да извършват основни геометрични построения.

Ако вникнем дълбоко в същността на тази задача, която предстои да решаваме в процеса на преподаване на геометрия в седми клас, ще стигнем до следния извод: **През тази учебна година се поставя началото на изучаване на геометрията в средното училище и учителят поема цялата отговорност за знанията на учениците си.**

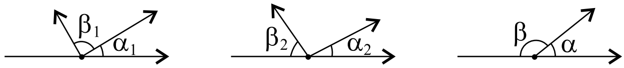
– Ако е решил успешно поставената обучаваща задача, то той е "отворил очите" на децата за възприемане на геометричните познания и ги е спечелил за математиката. В следващите учебни години обучението по математика ще е леко и приятно за всички ученици, завършили успешно седми клас.
– Ако учителят не успее да реши тази задача, то за неговите ученици геометрията, а и математиката ще останат неразбираеми до края на обучението им.

Изказване на определения

Още в първия урок на темата "Основни геометрични фигури" се въвежда понятието "определение (дефиниция)" като изречението, което въвежда ново понятие. Подчертава се, че всяко понятие се определя чрез вече дефинирани понятия: например понятията точка, права, отсечка се използват, за да се даде определение за триъгълник.

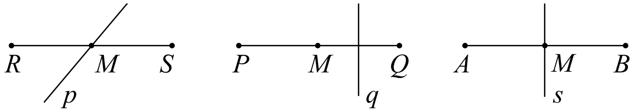
Методиката на въвеждане на понятия чрез определения и правилната им формулировка трябва да се прилага в целия курс по геометрия (Т2, Т4, Т6). Поради големия обем учебен материал по геометрия тези моменти не са застъпени в учебника. Ще се спрем на някои възможности:

Пример 1. При изказване на определение за съседни ъгли, могат да се коментират чертежите:



Изтъква се, че α_1 и β_1 не са съседни, въпреки че имат общо рамо, α_2 и β_2 също не са съседни, въпреки че имат рамене, които са противоположни лъчи, а само α и β са съседни, защото те имат общо рамо, а другите им рамене са противоположни лъчи.

Пример 2. При изказване на определение на симетрала на отсечка, може да се коментира определението върху чертежи. Ако M е среда на отсечките RS, PQ, AB, то p не е симетрала на RS, въпреки че минава през M, q не е симетрала на PQ, въпреки че е перпендикулярна на PQ.



Правата s е симетрала на AB, защото е перпендикулярна на AB и минава през средата ѝ M. Обръща се внимание, че понятието симетрала, употребено самостоятелно, без да е посочена съответна отсечка, няма смисъл.

Пример 3. При изказване на определението за квадрат в учебника се обяснява, че "Правоъгълник с равни страни" не може да се приеме за правилно изказано определение, защото допуска "преопределеност" (от равенството само на една двойка съседни страни следва равенството на всички страни). Същият коментар може да се направи и за изреченията "Правоъгълник с равни съседни страни", "Ромб с прави ъгли" и др.

Пример 4. При изказване на определението за трапец може също да се направят разсъждения за правилното изказване на определение: Например може да се постави следната задача:

Кое от изказаните твърдения е правилно определение за фигурата трапец и защо?

А. Четириъгълник, на който две срещуположни страни са успоредни.

Б. Четириъгълник, на който две срещуположни страни са успоредни, а другите две – не са успоредни.

В. Четириъгълник, на който само едната двойка срещуположни страни са успоредни.

Изказване на теореми. Доказателство

В много от темите, разработени в учебника, се обръща внимание на изказване на теореми. Първата теорема, която се изказва и доказва в учебника, е:

“Ако два съседни ъгъла са равни, то всеки от тях е прав.” Твърдението е изказано като са отделени условието на теоремата: “Ако...” и заключението “то...”.

Доказателството е записано подробно, като се обръща внимание на това, че за първи път е записано доказателство на теорема.

По-нататък всички признаци за еднаквост на два триъгълника изказваме по същия начин, с цел да се усвои изказването на теорема с отделяне на условието и заключението. В следващите теми много от теоремите вече се изказват така:

“Всяка точка от симетралата на дадена отсечка е на равни разстояния от краищата на отсечката”;

“В равнобедрен триъгълник ъглите при основата са равни” и т.н.

При така изказаните теореми учениците трябва сами да определят условието и заключението, които да оформят писмено като “дадено” и “да се докаже”. Обръща се внимание в текст от учебника, че за да се докаже твърдение за всяка точка от една права, достатъчно е то да се докаже за произволно избрана точка от нея (разбира се, ако всички точки са равнопоставени). В случая на цитираната теорема за симетралата се подчертава, че има точка M, която е от симетралата, но е и среда на отсечката AB, така че се налага да се разгледат два случая за произволно избрана точка X от s_{AB} : $X \equiv M$; $X \not\equiv M$. В учебника, след изказване на не малко на брой двойки теореми, които имат свойството: условието на първата е заключение на втората и обратно – условието на втората е заключение на първата, се въвежда понятието еквивалентни твърдения

$$\text{Ако от } p \Rightarrow q \text{ и от } q \Rightarrow p\text{, тогава } p \Leftrightarrow q.$$

Например в урока “Еквивалентни твърдения” се въвежда следното изказване на теорема:

“Една точка е от ъглополовящата на даден ъгъл тогава и само тогава, когато тя е на равни разстояния от раменете на ъгъла.”

Решава се и задачата: “Докажете теоремата: Ъглополовящата на външен ъгъл на триъгълник е успоредна на страна на триъгълника тогава и само тогава, когато той е равнобедрен.”, където се доказват и двете твърдения. Дадени са задания, в които учениците с по-голям интерес към математиката се упражняват да изказват две еквивалентни твърдения в една теорема, като използват думите “тогава и само тогава, когато” и обратно – ако е изказана теорема чрез това словосъчетание, да се изкажат две отделни теореми.

В учебника понятията “обратна теорема”, “необходимо и достатъчно условие” не се употребяват.

Обръща се специално внимание на теоремите-признаци и теоремите-свойства. При изказване на теоремите-признаци се следва правилото първо да се посочи родовото понятие, а след това условието, което го привежда в съответен вид. Например:

Т-признак: Четириъгълник, на който срещуположните двойки страни са равни, е успоредник.

Т-признак: Четириъгълник, на който диагоналите взаимно се разполовяват, е успоредник.

При изказване на теоремите-свойства първо се посочва фигурата и след това се определят връзките между нейните елементи. Например:

Т-свойство: В успоредника срещуположните двойки страни са равни.

Когато теоремите-признак и свойство изказват една и съща връзка между елементите, се подчертава, че те могат да се изкажат и като еквивалентни твърдения (т.е. това са необходими и достатъчни условия за съществуване на успоредник). Чрез такова съждение може и да се даде определение на дадено понятие:

"Един четириъгълник е успоредник тогава и само тогава, когато срещуположните му двойки страни са равни."

В учебника се обръща специално внимание на подхода при доказателството на една теорема. Всяка теорема има условие – дадени зависимости, и заключение – фактът, който трябва да обосновем. При доказателството се върви от условието към заключението, като при това се строи логически последователна верига от твърдения. Всяко от тези твърдения е обосновано от условието, от известни понятия, от аксиоми и от по-рано доказани теореми. В учебника четем:

> "Първо правим чертеж, въвеждаме означения и чрез тях записваме условието (дадено) и заключението (да се докаже) на теоремата и разсъжденията при доказателството. Обръщаме внимание, че в хода на доказателството използваме само вече изказани понятия и обосновани твърдения."

Когато учим учениците да доказват теореми, се подчертава, че се използват общите, а не индивидуалните свойства на разглежданата фигура. Например доказателството не зависи от размерите и разположението на фигурата в помощния чертеж.

Доказателствата на твърденията преди аксиомата за успоредните прави извършихме с непосредствено използване на понятия, изказани аксиоми и доказани теореми. В урока "Аксиома за успоредните прави" за първи се използва непряко доказателство. След доказване на следствията от аксиомата се въвежда методът, известен в математиката като "косвен метод" за доказване на твърдение (косвени доказателства). Учениците трудно възприемат математическата логика на тези разсъждения (което е и естествено), предлагаме да им се разясни смисълът на косвеното доказателство чрез следната нематематическа ситуация:

> "Училищното ръководство награждава класовете, които са украсили стаите си за 24 май. Има сигурна информация, че един от седмите класове ($7^А$, $7^Б$, $7^В$) е украсил стаята си, а другите два – не са изпълнили тази задача. Директорът отива да види кой от класовете трябва да бъде награден.
>
> Влиза в стаята на $7^А$ клас и проверява, че тя не е украсена за 24 май.
> Влиза в стаята на $7^Б$ клас и проверява, че тя не е украсена за 24 май.

За директора вече е ясно, че класната стая на $7^{В}$ клас е тази, която е украсена за 24 май и макар че тази класна стая е заключена и не може да се направи пряка проверка, той е направил "косвено" извод и награждава учениците на $7^{В}$ клас."

Задачата формулира три твърдения, които взаимно се изключват:

– Класната стая на $7^{А}$ клас е украсена за 24 май.
– Класната стая на $7^{Б}$ клас е украсена за 24 май.
– Класната стая на $7^{В}$ клас е украсена за 24 май.

Първите две твърдения се опровергават чрез пряко доказателство (в случая – чрез проверка). Тогава чрез "косвен", непряк извод, остава вярно третото твърдение.

В процеса на обучаване на учениците в доказване на теореми, се използват вече въведените означения. Обръща се внимание на писменото подреждане на доказателството. В подтекст в учебника се насочва вниманието как да се записва доказателството, че два триъгълника са еднакви, как да се номерират някои от изводите, за да се съкрати записът и т.н. В учебника съвсем целенасочено, с обучаващ характер, е възприет запис на доказателства, който да е подобен на този в тетрадките на учениците. Намален е обемът на обяснителния текст, като са избегнати излишните думи. В края на учебната година учениците трябва да придобият умения да записват кратко, точно, чрез символи, доказателството на една теорема.

Решаване на задачи по геометрия

Решаването на математически задачи е дейност, на която всеки човек може да се научи. Както се учи занаят! Никой не се е родил научен да решава задачи. Друг е въпросът, че някои от учениците ще се окажат по-сръчни, т.е. с по-голям усет и по-бързо ще възприемат, а други – ще се обучават по-бавно и няма да успеят да се справят с най-нестандартните задачи. Но хората са различни, не можем да искаме да са еднакви.

Към ученето на децата да решават задачи трябва да подходим със съзнанието, че това, което е разработено в учебника може и трябва да се усвои от всеки ученик и това е една решима задача. Защото при задачите в учебника сме направили внимателен подбор така, че да се разглеждат в система. От друга страна, в уроците са решени задачи, които по наше мнение са основни и чрез тях могат да се решават без затруднение задачите, дадени за самостоятелна работа след урока.

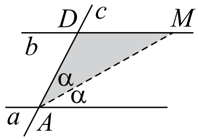
Обръщаме внимание на принципа, че в учебника не се решава задача за самата задача. Учебникът е книга, от която учениците трябва да учат. Ето защо при подбора на задачите в учебника сме се съобразявали с това, че всяка по-лека задача, която непосредствено прилага определено знание, учи на нещо, което после помага за решаване на все по-сложни математически проблеми. Подходът при обучаване в решаване на задачи е същият, както при изучаване на теоретичните знания по геометрия.

Ще обърнем внимание само на няколко момента:

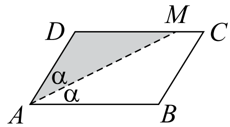
• В учебника са разгледани редица задачи, които са компоненти на други задачи.

Например:

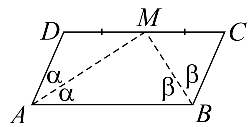
- Доказателството, че $\triangle ADM$ равнобедрен, се извършва и в трите задачи, които могат да се изкажат по дадените чертежи.



$(a \parallel b) \times c$
$DA = DM$?



$AD = 5, AB = 7$
$MC = ?$



$DM = MC$?
$\sphericalangle AMB = 90^\circ$?

- В учебника са разисквани решения на задачи, в които при търсене пътя на решението (анализа) се използва означаването на равните елементи с една и съща буква. Например в задачите, които можем да изкажем върху следните чертежи:

- Когато учим учениците да доказват еднаквостта на два триъгълника чрез признаците за еднаквост, в учебника следваме последователността от задачи:

  Доказваме, че два триъгълника са еднакви по признак.
  Доказваме, че два триъгълника, които са в една фигура, са еднакви, като се откриват равни елементи.
  Доказваме, че два триъгълника са еднакви, когато са в една фигура и част от тях се наслагва.

Доказваме еднаквост, като се използват комбинирано два признака за еднаквост.

Доказваме еднаквост на триъгълници, за да докажем, че отсечки (или ъгли) са равни като съответни елементи в еднакви триъгълници.

Откриваме еднакви триъгълници във фигура, за да докажем задача с по-голяма степен на трудност.

- В учебника има много задачи, които се решават по готови чертежи, върху които са означени дадени елементи и тези, които се търсят. При този вид задачи, които имат силен обучаващ ефект, също степенуваме по трудност. Например, когато доказваме еднаквост на два триъгълника по втори признак, разглеждаме задачи на три степени:

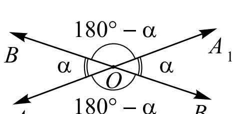
  – Непосредствено прилагане на признака.

  – Прилагане на признака, след като откриваме третите, съответно равни елементи въз основа на предходни знания.

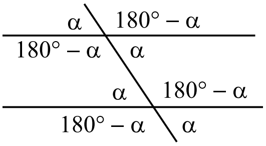
  – Двата еднакви триъгълника се наслагват и трябва да се открие, че имат обща страна.

При подходящо избрани примери-задачи се подготвя и усвояване на знания, които ще се изучават в следващи теми.

При някои чертежи, още в теоретичната част на урока, със съответните означения се подготвя решаването на група задачи. Например:

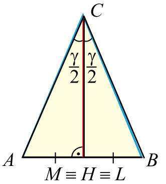


С това означение двете двойки връхни ъгли се означават чрез α и е ясно, че ако е даден един от ъглите, се намират и останалите три (стр. 55).

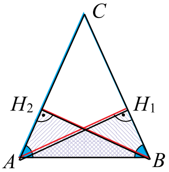


С това означение на ъглите при $a \parallel b$, пресечени с c е ясно, че ако знаем само един от тях, можем да намерим и останалите седем (стр. 63) и т.н.

• В учебника са разгледани системи от задачи, които се решават аналогично. Например:



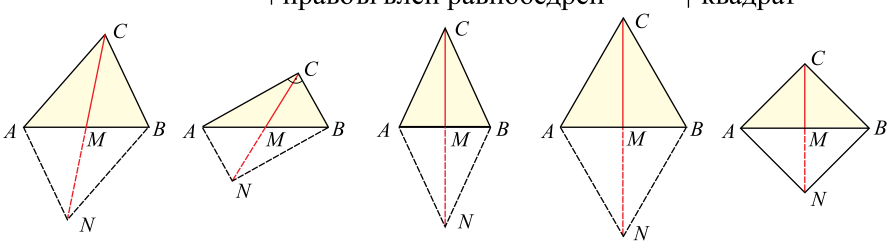
Задачата: Да се докаже, че ако в триъгълник
а) $m_c = h_c$;
б) $m_c = l_c$;
в) $l_c = h_c$, то този триъгълник е равнобедрен
(стр. 126, стр. 148).



Задачата: Да се докаже, че в равнобедрен триъгълник ABC $(AC = BC)$.
$AH_1 = BH_2$
$AL_1 = BL_2$
$AM_1 = BM_2$ и т.н. (стр.148)

Задачата, в която е даден триъгълник и една от медианите му, нанесена още веднъж върху продължението си (стр. 220):

Ако триъгълникът е:	произволен	, то се получава	успоредник
	равнобедрен		ромб
	равностранен		ромб
	правоъгълен		правоъгълник
	правоъгълен равнобедрен		квадрат



Въпросите, свързани с методиката на решаване на задачи, са много и е невъзможно да ги обхванем и да ги разискваме. Ще се спрем на няколко правила, които според нас са водещи в обучението на нашите прохождащи в геометрията ученици:

1. Трябва да се започне с коментар на решения на елементарни задачи върху готови чертежи.
2. Постепенно, с такт и търпение, да се стигне до самостоятелното записване решението на една теорема или задача.
3. В следващия етап доказателствата, които са по-леки, не трябва да се дават в готов вид. Особено ако ще доказваме теорема, аналогична на вече направено доказателство.

4. За да могат да решават задачи, учениците трябва да наизустяват понятията и твърденията, които ще ползват в следващите теми наготово, без да ги обосновават. В противен случай не можем да говорим за мислене и решение на задача.

5. Да се изисква от учениците добре да познават една фигура, която е вече разисквана в час. Например, като кажат ромб, те трябва да знаят как да докажат, че един успоредник е ромб, и ако е даден ромб, какви са свойствата му; или – ако е даден равностранен триъгълник, трябва да са наясно с всички твърдения, които характеризират тази фигура: признаци и свойства.

6. Един добре направен чертеж, който отговаря на условието на задача, може успешно да подскаже решението ѝ.

7. Когато задача има многословен и объркващ текст, за предпочитане е в седми клас тя да се изказва с означения и дори с дадени чертежи. Самостоятелно направеният чертеж, който следва от обяснителен текст, е по-труден етап и може да се реши успешно в осми клас.

Основни построения с линия и пергел

При системното изложение на основните геометрични фигури и признаци за еднаквост на два триъгълника, решаваме задачи за доказване на твърдение или за изчисляване на елемент от фигура по дадени мерки на други елементи. Почти всяка задача придружаваме с помощен чертеж, който онагледява и помага при решението ѝ. Служим си с думите: начертаваме, спускаме перпендикуляр, съединяваме, като използваме линийка с деления, транспортир, правия ъгъл на чертожния триъгълник. Възприели сме този подход, за да дойдем естествено до понятието “построителна задача” и да се направят първите стъпки към системното изучаване на конструктивните задачи.

Труден е преходът от пренасяне на отсечка чрез измерване дължината ѝ в съответни мерни единици към пренасянето ѝ с помощта на пергела. Това с още по-голяма сила важи при пренасяне на ъгъл – трябва да се обоснове твърдението, че ако се направят съответни построения на лъчи и окръжности, ще се получи ъгъл, равен на дадения ъгъл. Стигнахме до извода, че ако се преплете идеята за построителна задача с изучаване на признаците за еднаквост, ще се загуби системата знания и за едната, и за другата тема. Ако не обясним на учениците, че в геометрията има специални задачи, в които се иска да се построи геометрична фигура с предварително посочен инструментариум, трудно бихме мотивирали заменянето на линийката с деления с пергела. А основната ни цел е да учим учениците към всяко съждение да прибавят и въпроса “Защо?”.

При изграждане на системния курс по геометрия в 7. клас понятието “окръжност” не е застъпено. Ето защо в примерите и задачите специално избягваме да разискваме това понятие, въпреки че може да се свърже с еднаквите триъгълници и четириъгълници. По този начин искаме да учим децата да мислят чрез въведени понятия и твърдения в системата знания. А понятието “окръжност и свойствата ѝ” е основната тематика по геометрия за 8. клас.

Решаването на построителни задачи с линия и пергел е свързано с определението на понятието “окръжност” и елементите на окръжността.

Разработката в учебника използва знанията за окръжност от 6. клас – доказва се само теоремата:

“Ако в две окръжности с равни радиуси две хорди са равни, то и съответните им централни ъгли са равни.”

В учебника темата “Построения с линия и пергел е разработена за пет учебни часа (в програмата са формулирани 3 нови урока).

За това учебно време учениците трябва да се научат с линия и пергел да извършват основни построения и да построяват триъгълник по дадени елементи.

Тежестта при решаване на елементарни построителни задачи пада върху самото построение и разсъжденията, чрез които стигаме до него, но как да учим учениците да мислят, ако не поставяме въпроси като: защо, след като сме построили окръжности и прави, сме получили права, успоредна на друга дадена права; или винаги ли ще можем да построим триъгълник по три дадени страни, и т.н. В учебника сме отговаряли чрез чертежи на някои от тези въпроси. Те трябва да се коментират в часа, но не се изискват като знания за оценяване. Използвали сме думите: обосновка на решението, разсъждения върху решението, с което подготвяме пълното решение на една конструктивна задача в следващите учебни години.

Обръщаме внимание, че целите, които си поставяме в седми клас, са учениците да извършват свободно основните построения и основните задачи за построяване на триъгълник. Това са знания, които трябва да се овладеят от всички ученици.

Ще се спрем на още една особеност на преподаване на геометрия в седми клас по предлагания учебник – мястото на темата “Лица на фигури” в системния курс.

Формулите за лица на четириъгълници и кръг се изучават още в пети клас. Подходът при извеждане на водещата формула – лице на правоъгълник, е чисто индуктивен. При извеждане на останалите формули методите индукция и дедукция се прилагат комбинирано. Това е така, защото при извеждане на формулата например за лице на произволен триъгълник се използва вече изведената формула за лице на правоъгълен триъгълник, а формулите за лица на фигури се използват наготово (като общи знания) при решаване на задачи (в частни случаи).

Учениците знаят формулите за лице на изучените геометрични фигури. В новата програма на МОН (5. – 8. клас) не е предвидена тема за по-задълбоченото изучаване на “Лица на геометрични фигури”. За да могат да се ползват формулите за лице при решаване на задачи, в учебника се припомнят тези формули към съответните уроци за триъгълник, четириъгълник, видове четириъгълници. В обобщителния урок към темата “Успоредник. Трапец” са систематизирани познатите формули за лица, като са направени и съответни чертежи. Обръщаме внимание, че в учебника е изведена формулата за лице на ромб (и делтоид) чрез диагоналите му.

Система от знания за геометричните обекти

За да се изградят геометричните знания в система, в учебника, след всяка тема, са систематизирани понятията и твърденията, въведени в урока, които могат да се ползват без доказателство в следващите теми (в рубриката **"В тази тема въведохме"**). Този математически подход улеснява и преподавателя, и учениците при изграждане на необходимия математически апарат за решаване на задачи. Ще отбележим, че в тази система сме поставили и някои основни задачи, които се срещат често и използването им "наготово" улеснява, а не усложнява решаването на задачи. Например:

"В еднаквите триъгълници съответните височини, медиани и ъглополовящи са равни";
"В равнобедрения правоъгълен триъгълник острите ъгли са по 45°";
"Ако единият от ъглите на равнобедрен триъгълник е 60°, той е равностранен".

В края на учебника, като приложение, е изградена "Система от основни понятия и твърдения в геометрията" – това са твърденията, които могат да се използват при доказване на теореми и решаване на задачи (наготово), без да се доказват.

АЛГЕБРА

Системното изграждане на курса по алгебра в средното училище започна в 6. клас с въвеждане на понятието "цял рационален израз" – понятията променлива, постоянна величина, константа и параметър. Въвеждането на буквената символика за величините е един преходен момет в съзнанието на учениците, качествен скок по пътя на математическото познание, което започва в 6. клас и продължава в 7. клас с тема № 1 "Цели изрази". В тази тема акцентът са понятията "тъждествени изрази" и "тъждество". Изучават се тъждествата, които са известни като "формули за съкратено умножение". Използването на формулите при тъждествено преобразуване на изрази допълва техниката за преобразуване на изрази, съдържащи букви, и затвърдява знанията на учениците, придобити в 6. клас. Темата продължава с разлагане на многочлени на множители, като се разглеждат познатите методи и комбинираното им прилагане.

За да се научат учениците да "смятат с изрази", във всеки урок на учебника, независимо от темата и другите цели, които се постигат с изучаването ѝ, са решени много примери, степенувани по трудност, в които са обхванати възможно най-много особености при прилагане на правилата за преобразуване на изрази. След решаване на съответните примери, в рубриката "Обърнете внимание!" се коментират особеностите и вариантите на преобразуванията. Това е направено с цел да се осигури ученето на всички ученици, независимо дали са отсъствали или не, дали им преподава учител с опит или учител, който прави първи стъпки в професията.

Особеност на учебника е, че се търсят начини практически да се усвоят някои правила, по-леко да се запомнят съответните свойства. Например при изучаване на формулите за съкратено умножение се използва и такъв нестандартен запис $(\mathrm{I} + \mathrm{II})^2 = \mathrm{I}^2 + 2 \,.\, \mathrm{I} \,.\, \mathrm{II} + \mathrm{II}^2$. Когато се изказват свойствата на неравенствата с едно неизвестно, се търси аналог със свойствата на уравненията. Така стигаме до изказване на второто свойство:

"Двете страни на неравенството могат да се умножат или разделят на едно и също число $c \neq 0$, като:
– ако $c > 0$, получава се неравенство, еквивалентно на даденото;
– ако $c < 0$, след смяна на посоката му се получава неравенство, еквивалентно на даденото."

Обръщаме внимание, че в учебника, след всяко твърдение, се разискват и съответните примери.

При разработване на учебната тематика сме следвали принципа на последователност: от по-лекото към по-трудното! По този начин в учебника се изгражда и систематичен подход при решаване на задачи. Например при темата "Разлагане многочлени на множители", след усвояване на отделните методи, се поставя въпросът за комбинираното им прилагане. Нашият подход и тук е в система: първо се разискват примери, които се разлагат чрез изнасяне на общ множител и групиране, след това – чрез изнасяне на общ множител и формулите за съкратено умножение; след това чрез комбинирано прилагане на всички методи. При тази тема не бързаме да навлизаме в нестандартни приложения. Те са направени в обобщения урок, след като са усвоени основните правила.

Ще обърнем внимание, че формулите за съкратено умножение в общия им вид записваме чрез буквите a и b. В 6. клас в раздела "Цели рационални изрази" с a и b означаваме постоянни величини, които са и коефициенти. Но сме направили бележка, че можем да ги разгледаме и като променливи (при уговорка). В програмата, вместо записът $(u + v)^2$ е приет записът $(a + b)^2$, който се възприема и запомня по-лесно от учениците.

В новата учебна програма на МОН (5-8 клас) темата "Уравнения" не е застъпена в 6. клас, а се въвежда в 7. клас. Търсенето на неизвестна величина x, която участва в равенство, е дейност, която започва още в началния курс и продължава до края на 6. клас (неизвестно събираемо, неизвестен множител и т.н.). Математическото понятие "Уравнение" се въвежда в 7. клас в тема № 3 "Уравнения". Темата започва с въвеждане на числови равенства и техните свойства. Въвежда се понятието "еквивалентни числови равенства и знакът "$\Leftrightarrow$" се използва при записване на някои от свойствата.

В алгебрата има различни подходи към понятието линейно уравнение от първа степен с едно неизвестно. В учебника за 7. клас на същите автори (1996 г.) уравнението $ax + b = 0$, $a \neq 0$ се нарича уравнение от първа степен с едно неизвестно или линейно уравнение.

В новия учебник подходът към това понятие е съобразен с формулировката на заглавията и последователността на уроците в програмата на МОН:

- Уравнението $ax + b = 0$ при $a \neq 0$ се нарича уравнение от първа степен с едно неизвестно и има единствено решение.
- Уравнението $ax + b = 0$ при $a = 0$ се нарича линейно уравнение с едно неизвестно.

Темата "Неравенства" се въвежда за първи път в 7. клас. Започва с урок, който не е даден в програмата, но без него не може да се навлезе в темата. В това "въведение" в темата "Неравенства" се въвеждат понятията: еднопосочни и разнопосочни неравенства, $a < 0$ – отицателно число и $a > 0$ – положително число, строги и нестроги неравенства, двойни неравенства.

Урокът "Числови неравенства. Свойства" е разработен аналогично на урока за числовите равенства. И тук се въвежда понятието "еквивалентни числови неравенства" и знакът $\Leftrightarrow$ се използва при записване на последните две свойства.

В урока "Еквивалентни неравенства" се изказва определение за еквивалентни неравенства с едно неизвестно.

Теоремите за еквивалентност на уравнения и неравенства се изказват аналогично и с примери се показва, че следват от свойствата за еквивалентност на числовите неравенства.

Темата за неравенства завършва с обобщителен урок, в който се систематизират знанията на учениците за уравнения и неравенства, като се търсят приликите и разликите между свойствата на двете понятия.

4 ПРИМЕРНО ГОДИШНО РАЗПРЕДЕЛЕНИЕ ПО МАТЕМАТИКА ЗА 7. КЛАС

34 учебни седмици = 136 учебни часа. I срок 18 учебни седмици = 72 учебни часа
II срок 16 учебни седмици = 64 учебни часа

№ на урок	Вид на урока	Тема на урока	Очаквани резултати Ученикът:	Основни понятия Основни знания	Брой часове	Месец	№ на седмица
Първи учебен срок 18 седм. – 72 часа							
Начален преговор							
1.	Преговор	Начален преговор. Тест с решения	Умее да решава тестови задачи върху учебния материал за 6. клас	Основни понятия и знания по матетатика от 6. клас	1	IX	1
2.	Проверка	Входно ниво. Тест № 1 Тест № 2	Проверка и оценка знанията на учениците	Тестът като форма за оценка	1	IX	1
Тема 1. Цели изрази							
3.	Нов урок	Тъждествени изрази	Използва различни начини за доказване на тъждества	Тъждествени изрази Тъждество	1	IX	1
4.	Нов урок	Формулата $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	• Знае формулата $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ • Умее да прилага формулата при тъждествени преобразувания на изрази	Теореми – формули за съкратено умножение $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	1	IX	1
5.	Упражнение	Формулата $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Упражнение	• Умее да прилага формулата при различни задачи • Умее да повдига тричлен на квадрат		1	IX	2

6.	Нов урок	Формулата $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	• Знае формулата $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ • Умее да прилага формулата при тъждествени преобразувания на изрази	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	1	IX	2
7.	Нов урок	Формулата $(a \pm b)^3 =$ $= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	• Знае формулата $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ • Умее да прилага формулата при тъждествени преобразувания на изрази	$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$	1	IX	2
8.	Упражнение	Формули за съкратено умножение. Упражнение	• Умее да прилага формулите за съкратено умножение при опростяване на изрази най-малка и най-голяма стойност на израз	• Анализ на получен резултат • Намират най-малка или най-голяма стойност на някои изрази	1	IX	2
9.	Нов урок	Формулата $a^3 \pm b^3 =$ $= (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$	• Знае формулата $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$ • Умее да прилага формулата при тъждествени преобразувания на изрази	непълен квадрат	1	X	3
10.	Упражнение	Формули за съкратено умножение. Приложения	• Знае формулите за $(-x - y)^2$ и $(-x - y)^3$ • Умее да прилага формулите за съкратено умножение при доказване на тъждества намиране числена стойност на израз	$(-x - y)^2 = (x + y)^2$ $(-x - y)^3 = -(x + y)^3$	1	X	3
11.	Нов урок	Разлагане на многочлени на множители чрез изнасяне на общ множител	Умее да разлага многочлени на множители чрез изнасяне на общ множител	разлагане общ множител	1	X	3

12.	Нов урок	Разлагане чрез формулите за съкратено умножение	• Умее да разлага многочлени на множители чрез формулите за съкратено умножение • Осмисля симетричността на равенството при формулите		1	X	3
13.	Упражнение	Разлагане чрез формулите за съкратено умножение. Продължение	Умее да разлага многочлени на множители чрез формулите за съкратено умножение		1	X	4
14.	Нов урок	Разлагане чрез групиране	Умее да разлага многочлени на множители чрез групиране		1	X	4
15.	Нов урок	Разлагане чрез комбирано използване на различни методи	Умее да разлага многочлени на множители чрез използване на два от изучените метода		1	X	4
16.	Упражнение	Разлагане чрез комбирано използване на различни методи. Продължение	• Умее да разлага многочлени чрез комбинирано използване на различни методи • Запознава се с метода “допълване до точен квадрат”	квадратен тричлен допълване до точен квадрат	1	X	4
17.	Нов урок	Тъждествено преобразуване на изрази. Приложения	• Умее да прилага тъждествените преобразувания на изрази при опростяване на изрази; доказване на тъждества; рационално смятане; практически задачи.		1	X	5
18.	Обобщение	Обобщение на темата „Цели изрази”	• Знае формулите за съкратено умножение и умее да ги прилага • Знае методите за разлагане и умее да ги прилага		1	X	5

19.	Проверка	Тест върху темата „Цели изрази”	Проверка и оценка знанията на учениците върху темата		1	X	5
	Тема 2. Основни геометрични фигури						
20.	Упражнение	Въведение в геометрията (преговор с допълнение)	Запознава се с основни понятия, аксиоми, определения, теореми, доказателство на теорема, задача за доказване	Има представа за аксиоматично изграждане на геометрията	1	X	5
21.	Нов урок	Точка, права и отсечка	Знае: отсечка, вътрешна точка за отсечка, дължина на отсечка, сравняване на отсечки, равни отсечки, среда на отсечка, сбор и разлика на отсечки	• среда на отсечка • сравняване на отсечки • чертане на отсечка, която е сбор или разлика на две отсечки	1	X	6
22.	Нов урок	Лъч, полуравнина и ъгъл	Знае: ос, лъч, полуравнина, ъгъл, вътрешна точка на ъгъл, мярка на ъгъл, сравняване на ъгли, ъглополовяща на ъгъл, сбор и разлика на ъгли	• лъч, полуравнина • сравняване на отсечки • чертане на ъгъл, който е сбор или разлика на два ъгъла	1	X	6
23.	Нов урок	Съседни ъгли, противоположни ъгли. Перпендикулярни прави	• Знае свойството на съседните ъгли • Умее да го прилага в задачи	• съседни ъгли • противоположни ъгли • прав ъгъл, остър ъгъл, тъп ъгъл	1	X	6
24.	Упражнение	Съседни ъгли, противоположни ъгли. Перпендикулярни прави. Продължение	• Знае свойството на противоположните ъгли • Умее да прилага свойствата на съседните и връхните ъгли в задача • Знае понятието “перпендикулярни прави”	• Решаване на задача за доказателство • Изказване на теорема в условна форма	1	X	6

25.	Нов урок	Ъгли, получени при пресичането на две прави с трета. Признак за успоредност на две прави	• Познава видовете ъгли, получени при пресичането на две прави с трета • Знае признакът за успоредност на две прави	• Теореми-признаци • Кръстни ъгли • Съответни ъгли • Прилежащи ъгли	1	X-XI	7
26.	Упражнение	Признаци за успоредност на две прави. Упражнение	• Знае теореми-признаци за успоредност на две прави • Умее да ги прилага в задачи		1	X-XI	7
27.	Нов урок	Аксиома за успоредните прави	• Знае аксиомата за успоредните прави • Знае теореми за успоредност на прави и следствия от тях	• преки доказателства • косвени доказателства	1	X-XI	7
28.	Нов урок	Свойства на успоредните прави	• Знае свойствата на ъглите, получени при пресичане на две успоредни прави с трета • Знае теореми-следствия	• разстояние от точка до права • пета на перпеникуляр	1	X-XI	7
29.	Нов урок	Триъгълник	• Знае определението за триъгълник и елементите му • Знае видовете триъгълници • Знае определенията за височина, медиана и ъглополовяща в триъгълник	Определение на: • триъгълник • височина • медиана • ъглополовяща в триъгълник	1	XI	8
30.	Нов урок	Сбор на ъглите в триъгълник	• Знае свойството на ъглите в произволен триъгълник • Знае, че сборът от острите ъгли в правоъгълен триъгълник е 90° • Умее да прилага свойствата на ъглите в триъгълник	• $\alpha = \beta = \gamma = 180°$ • Ако $\gamma = 90°$, то $\alpha + \beta = 90°$ • Параметризира геометрични ситуации при решаване на задачи за изчисление	1	XI	8

31.	Нов урок	Външен ъгъл на триъгълник	• Знае определението за външен ъгъл • Знае свойствата на външен ъгъл на триъгълник • Умее да прилага тези свойства в задачи	Външен ъгъл Вътрешен ъгъл	1	XI	8
32.	Упражнение	Триъгълник. Упражнение	• Умее да сравнява ъгли • Прилага изучените свойства в различни задачи • Запознава се с решаване на задача с допълнително построение	Параметризира геометрични ситуации при решаване на тестова задача Допълнително построение	1	XI	8
33.	Обобщение	Обобщение на темата „Основни геометрични фигури”	• Умее да решава задачи за изчисление и доказателство върху изучената тема • Умее да решава задачи с допълнително построение	Параметризира геометрични ситуации при решаване на задачи за изчисление и доказателство	1	XI	9
34.	Проверка	Тест върху темата „Основни геометрични фигури”	Проверка и оценка знанията на учениците		1	XI	9
	Тема 3. Уравнения						
35.	Нов урок	Числови равенства. Свойства	Знае свойствата на числовите равенства и умее да ги прилага	• числово равенство • вярно числово равенство	1	XI	9
36.	Нов урок	Уравнение с едно неизвестно	Знае понятието уравнение и понятията, свързани с него	уравнение лява, дясна страна членове корен (решение) да решим едно уравнение	1	XI	9

37.	Нов урок	Еквивалентни уравнения	• Знае понятието еквивалентни уравнения • Знае теоремите за еквивалентност на уравнения • Прилага теоремите при решаване на уравнения	Еквивалентни (равносилни) уравнения	1	XI	10
38.	Нов урок	Уравнението $ax + b = 0$	• Знае да решава уравнението $ax + b = 0$ при $a \neq 0$ и $a = 0$	Линейно уравнение	1	XI	10
39.	Упражнение	Уравнението $ax + b = 0$. Упражнение	• Решаване на уравнения, свеждащи се до уравнението $ax + b = 0$ • Умее да се „освобождава от знаменател"	Освобождаване от знаменател	1	XI	10
40.	Нов урок	Уравнението $(ax + b)(cx + d) = 0$	Умее да решава уравнения от вида $(ax + b)(cx + d) = 0$ и уравнения, свеждащи се до тях	Разбира смисъла на логическия съюз "или"	1	XI	10
41.	Нов урок	Уравнението $\|ax + b\| = c$	Умее да решава уравнения от вида $\|ax + b\| = c$ и уравнения, свеждащи се до тях	Уравнение с модул (модулно уравнение)	1	XI-XII	11
42.	Нов урок	Уравнения, свеждащи се до линейни	• Умее да решава уравнения, свеждащи се до линейни • Решава уравнения чрез използване на методите на разлагане		1	XI-XII	11
43.	Нов урок	Линейно параметрично уравнение	Умее да решава параметрично уравнение	Уравнение с параметър	1	XI-XII	11
44.	Нов урок	Моделиране с линейни уравнения	• Умее да моделира твърдения с математически равенства • Умее да използва уравнения при моделиране на ситуации	Моделиране с линейни уравнения – етапи на моделирането	1	XI-XII	11

45.	Упражнение	Моделиране с линейни уравнения. Упражнение	Умее да оценява получения резултат съобразно моделираната ситуация		1	XII	12
46.	Нов урок	Задачи от движение	Умее да моделира ситуации при движение чрез уравнения	$S = vt$	1	XII	12
47.	Упражнение	Задачи от движение. Продължение	Умее да моделира ситуации при движение по река чрез уравнения	$v_{\text{по течение}} = v_{\text{сп. в.}} + v_{\text{теч.}}$ $v_{\text{срещу теч.}} = v_{\text{сп. в.}} - v_{\text{теч.}}$	1	XII	12
48.	Нов урок	Задачи от работа	Умее да моделира задачи от количество работа Q	$Q = nt$ n – норма t – време	1	XII	12
49.	Упражнение	Задачи от работа. Продължение	Умее да моделира задачи от работа, при които количеството работа се приема за единица		1	XII	13
	Класна работа за I срок Предвидени са 3 учебни часа: 1 час за подготовка, 1 час за писмена работа, 1 час за поправка.				3	XII	13
50.	Нов урок	Задачи от капитал	Умее да моделира и решава задачи от капитал	лихва лихвен процент акциз брутна заплата	1	XII-I	14
51.	Нов урок	Задачи от смеси и сплави	Умее да моделира и решава задачи от смеси и сплави	процентно съдържание проба	1	XII-I	14
52.	Обобщение	Обобщение на темата „Уравнения”	• Обобщаване на знанията от темата • Решаване на по-сложни задачи, които комбинират знанията от темата		1	XII-I	14
53.	Проверка	Тест върху темата „Уравнения”	Проверка и оценка на знанията на учениците		1	XII-I	14

	Тема 4. Еднакви триъгълници						
54.	Упражнение	Еднакви триъгълници. Въведение	• Знае определението на понятието „Еднакви триъгълници” • Умее да открива съответни елементи в еднакви триъгълници	еднакви триъгълници съответни страни съответни върхове съответни ъгли	1	I	15
55.	Нов урок	Първи признак за еднаквост на два триъгълника	• Знае първи признак за еднаквост на два триъгълника • Умее да открива съответни елементи и еднакви триъгълници по I признак	признак за еднаквост Първи признак	1	I	15
56.	Упражнение	Първи признак за еднаквост на два триъгълника. Упражнение	• Умее да открива еднакви триъгълници • Умее да доказва, че два триъгълника са еднакви по I признак		1	I	15
57.	Нов урок	Втори признак за еднаквост на два триъгълника	• Знае втори признак за еднаквост на два триъгълника • Умее да доказва, че два триъгълника са еднакви по II признак	Втори признак за еднаквост	1	I	15
58.	Упражнение	Първи втори признак за еднаквост на два триъгълника. Упражнение	• Умее да решава задачи, в които се използва I и II признак • Умее да създава ситуации, в които се прилага I и II признак		1	I	16
59.	Нов урок	Равнобедрен триъгълник	• Знае определението за равнобедрен триъгълник • Знае свойствата на равнобедрения триъгълник	Равнобедрен триъгълник	1	I	16
60.	Упражнение	Равнобедрен триъгълник. Равностранен триъгълник. Упражнение	• Знае определението и свойствата на равностранен триъгълник • Решава задачи от равнобедрен триъгълник чрез еднакви триъгълници	Равностранен триъгълник	1	I	16

61.	Нов урок	Симетрала на отсечка	• Знае определението на понятието симетрала на отсечка • Знае свойствата на симетралата	Симетрала на отсечка В равнобедрен триъгълник $CM = CH = CL$ z s_{AB}	1	I	16
62.	Упражнение	Симетрала на отсечка. Упражнение	• Прилага знанията за симетрала на отсечка в задачи • Решава тестови задачи		1	I-II	17
63.	Нов урок	Трети признак за еднаквост на два триъгълника	• Знае трети признак за еднаквост на два триъгълника • Умее да го прилага при решаване на задачи	Трети признак	1	I-II	17
64.	Нов урок	Перпендикуляр от точка към права	Знае понятията, въведени в урока и ги прилага при решаване на задачи	Разстояние от точка до права Разстояние между две успоредни прави	1	I-II	17
65.	Нов урок	Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30°	Знае свойството на правоъгълен троъгълник с ъгъл 30° и може да го изкаже като признак		1	I-II	17
Втори учебен срок – 16 седмици – 64 часа							
66.	Упражнение	Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30°. Упражнение	Умее да прилага признака и свойството при решаване на тестови задачи		1	II	18
67.	Нов урок	Медиана към хипотенузата в правоъгълен триъгълник	Знае двете еквивалентни твърдения за медиана към хипотенузата в правоъгълен триъгълник		1	II	18
68.	Упражнение	Медиана към хипотенузата в правоъгълен триъгълник. Упражнение	Използва знанията за медиана към хипотенузата в правоъгълен триъгълник и свойството му, ако има ъгъл 30°, за да докаже свойство на правоъгълен триъгълник с ъгъл 15°	Свойство на правоъгълен триъгълник с ъгъл 15°	1	II	18

69.	Нов урок	Признак за еднаквост на два правоъгълни триъгълника	• Знае признака за еднаквост на два правоъгълни триъгълника • Умее да го използва в задачи	Признак за еднаквост на два правоъгълни триъгълника (IV признак)	1	II	18
70.	Нов урок	Ъглополовяща на ъгъл	Знае теоремата-свойство и теоремата-признак за ъглополовяща на ъгъл	Ъглополовяща на ъгъл	1	II	19
71.	Упражнение	Ъглополовяща на ъгъл. Упражнение	Умее да прилага теоремите за ъглополовящата на ъгъл при решаване на задачи		1	II	19
72.	Нов урок	Височина, ъглополовяща и медиана в равнобедрен триъгълник	Знае свойствата на височините, ъглополовящите и медианите към основата и към бедрата в равнобедрен триъгълник		1	II	19
73.	Упражнение	Еквивалентни твърдения	Може да изказва две еквивалентни твърдения като едно твърдение, като ги свързва с думите „тогава и само тогава” и обратно	Еквивалентни твърдения	1	II	19
74.	Упражнение	Задачи за построение. Въведение	Запознава се с нов вид задачи – задачи за построение • Пренасяне на отсечка	Построителна задача	1	II	20
75.	Нов урок	Построения с линия и пергел. Основни построителни задачи	Умее да построява • сбор и разлика на отсечки • ъгъл, равен на даден ъгъл • сбор и разлика на ъгли • права, успоредна на дадена права	Основни построителни задачи	1	II	20
76.	Упражнение	Построения с линия и пергел. Основни построителни задачи (продължение)	Умее да построява: • симетрала на остечка • среда на отсечка • перпендикуляр от точка към права • ъглополовяща на ъгъл	Основни построителни задачи	1	II	20

77.	Нов урок	Построяване на триъгълник по две страни и ъгъл между тях	• Умее да построява триъгълник по две страни и ъгъл между тях • Прилага задачата при построяване на правоъгълен триъгълник		1	II	20
78.	Нов урок	Построяване на триъгълник по страна и два прилежащи ъгъла	• Умее да построява триъгълник по страна и два прилежащи ъгъла • Умее да построява триъгълник по страна и два ъгъла		1	III	21
79.	Обобщение	Обобщение на темата „Еднакви триъгълници”	• систематизира знанията от темата • прилага знанията за еднаквост в практическа задача		1	III	21
80.	Проверка	Тест върху темата „Еднакви триъгълници”	Проверка и оценка знанията на учениците		1	III	21
	Тема 5. Неравенства						
81.	Упражнение	Числови неравенства. Въведение	Знае да изобразява числа върху числова ос и да ги сравнява	Числово неравенство • верни, неверни • еднопосочни, разнопосочни • строги, нестроги • двойни неравенства	1	III	21
82.	Нов урок	Числови неравенства. Свойства	Знае свойствата на числовите неравенства и умее да ги прилага		1	III	22
83.	Нов урок	Еквивалентни неравенства	• Знае теоремите за еквивалентност на неравенства • Умее да ги прилага	• Решения на неравенство • Да решим едно неравенство • Еквивалентни неравенства	1	III	22
84.	Нов урок	Неравенство с едно неизвестно	• Умее да решава неравенство с едно неизвестно • Умее да съобразява, кога едно неравенство няма решение или всяко число е негово решение		1	III	22

85.	Нов урок	Линейно неравенство с едно неизвестно	Знае понятието „линейно неравенство с едно неизвестно”	• линейно неравенство с едно неизвестно • нестроги линейни неравенства	1	III	22
86.	Нов урок	Представяне решенията на линейно неравенство с интервали и графика	Умее да представя решение на линейно неравенство с интервали и графично	Числов интервал • отворен • затворен • полуотворен • полузатворен	1	III	23
87.	Нов урок	Неравенства, свеждащи се до линейни	• Умее да решава неравенства, свеждащи се до линейни • Умее да определя вярност на съждение „>; <; ≥; ≤” и на техните отрицания	• не е >, не е < • не е повече, не е по-малко • е най-много, е най-малко • е поне	1	III	23
88.	Упражнение	Неравенства. Упражнение	• Умее да решава неравенства от вида $0x > 5$, $0x < 5$, $0x > 0$, $0x < 0$ • Има понятие от решаване на неравенства с параметър		1	III	23
89.	Нов урок	Приложения на линейните неравенства	• Намира решения на неравенства, удовлетворяващи определени условия • Намира стойност на параметър при определени условия за решението		1	III	23
90.	Упражнение	Уравнения и неравенства. Обобщение	Знае приликите и разликите между уравнения и неравенства		1	III	24
91.	Нов урок	Неравенства между страни и ъгли в триъгълника	Знае теоремите за неравенства между страни и ъгли в триъгълник и ги прилага		1	III	24

92.	Упражнение	Неравенства между страни и ъгли в триъгълника. Упражнение	Умее да прилага неравенствата между страни и ъгли в триъгълника при решаване на задачи	Свойства на страните и ъглите в триъгълник	1	III	24
93.	Нов урок	Неравенство на триъгълника	Знае теоремите за неравенства между страни на триъгълника	Ако $a > b > c$, то $b - c < a < b + c$ $a - c < b < a + c$ $a - b < c < a + b$	1	III	24
94.	Упражнение	Неравенство на триъгълника. Упражнение	Умее да решава задачи, в които се използва неравенството на триъгълника		1	IV	25
95.	Нов урок	Построяване на триъгълник по три страни	• Умее да построява триъгълник по три страни • Умее да построява равностранен и равнобедрен триъгълник • Умее да построява ъгъл 60°, 30°, 15°, 45°		1	IV	25
96.	Обобщение	Обобщение на темата „Неравенства”	• Обобщава знанията върху темата • Умее да използва неравенства при моделиране на ситуации		1	IV	25
97.	Проверка	Тест върху темата „Неравенства”	Проверка и оценка знанията на учениците		1	IV	25
	Тема 6. Успоредник. Трапец						
98.	Нов урок	Успоредник. Свойства на страните	• Знае определението за успоредник и елементите му • Знае свойството на срещуположните страни в успоредника	Срещулежащи страни Срещулежащи ъгли Прилежащи страни и ъгли	1	IV	26

99.	Нов урок	Свойства на диагоналите на успоредник	• Знае свойството на диагоналите в успоредника • Умее да го прилага в задачи със свободен и избираем отговор		1	IV	26
100.	Нов урок	Свойства на ъглите на успоредник	Знае свойствата на ъглите в успоредника и ги прилага при решаване на задачи		1	IV	26
101.	Упражнение	Успоредник. Упражнение	• Знае признаците и свойствата на успоредника • Умее да ги прилага в задачи		1	IV	26
102.	Нов урок	Построяване на успоредник	Умее да построява успоредник		1	IV	27
103.	Нов урок	Правоъгълник	• Знае определението за правоъгълник • Знае теоремите-признаци и теоремите-свойства на правоъгълник	Правоъгълник Теореми-признаци Теореми-свойства	1	IV	27
104.	Нов урок	Ромб	• Знае определението за ромб • Знае теоремите-признаци и теоремите-свойства на ромба и умее да ги прилага в задачи	Ромб Теореми-признаци Теореми-свойства	1	IV	27
105.	Нов урок	Квадрат	• Знае определенията за квадрат и свойствата на квадрата • Умее да прилага знанията за квадрат в задачи	Квадрат	1	IV	27
106.	Упражнение	Видове успоредници. Упражнение	• Умее да решава задачи от видове успоредници • Знае формулата за лице на ромб чрез диагоналите му		1	V	28

107.	Нов урок	Трапец. Равнобедрен трапец	Знае • определението за трапец • елементите на трапец • равнобедрен трапец – свойства на ъглите	Трапец Равнобедрен трапец – свойства на ъглите	1	V	28
108.	Упражнение	Трапец. Продължение	• Знае свойството на диагоналите на равнобедрен трапец • Знае определението за правоъгълен трапец • Умее да решава задачи	Правоъгълен трапец	1	V	28
109.	Обобщение	Обобщение на темата „Успоредник. Трапец”	Умее да решава общи задачи върху темата		1	V	28
	Класна работа за II срок Предвидени са 3 учебни часа: 1 час за подготовка, 1 час за писмена работа, 1 час за поправка.				3	V	29
110.	Проверка	Тест върху темата „Успоредник. Трапец”	Проверка и оценка знанията на учениците		1	V	29
	Годишен преговор						
111.	Преговор	Годишен преговор. Тест с решения	Умее да решава задачи със свободен и с избираем отговор върху учебния материал за 7. клас		1	V	30
112.	Проверка	Изходно ниво. Тест № 1 Тест № 2	Проверка и оценка знанията на учениците върху учебния материал за седми клас		1	V	30

Уроци	112	часа
Класни работи	6	часа
Резервни часове	18	часа
Общо	136	часа

Седмици	№ 30	→	2 часа
	№ 31	→	4 часа
	№ 32	→	4 часа
	№ 33	→	4 часа
	№ 34	→	4 часа
			18 часа

5 ВАРИАНТИ ЗА КЛАСНИ РАБОТИ ПРЕЗ I И II УЧЕБЕН СРОК

Критерии за оценка

Всяка тема съдържа 6 задачи, от които: 4 – с избираем отговор и
2 – със свободен отговор.

Задачите се оценяват по точки, както следва:

Задача 1 – с 1 точка
Задачи 2 и 3 – с по 2 точки
Задача 4 – с 3 точки
Задачи 5 и 6 – с по 4 точки

Максималният брой точки е 16.

Числова оценка може да се получи от формулата $z = 2 + 0{,}25N$, където N е броят на получените точки.

Предлагаме да се изисква кратко (схематично) решение на задачите от 1 до 4 и подробно решение на задачи 5 и 6.

При допуснати грешки се отнемат точки (може и 0,5 точки).

Бележка: В учебните тетрадки на издателство "Архимед" има 16 тематични контролни работи, които са съставени и се оценяват по подобие на предложените по-горе варианти за класна работа.

I учебен срок (Класна работа № 1)

За I учебен срок предлагаме два варианта теми за класна работа. Знанията, които проверяваме, са:

- Цели изрази
  - Формули за съкратено умножение
  - Нормален вид на многочлен
  - Численa стойност на израз
- Основни геометрични фигури
  - Свойства на успоредните прави
  - Сбор от ъгли на триъгълник
  - Външен ъгъл на триъгълник
- Уравнения
  - Уравнение с едно неизвестно
  - Моделиране с линейни уравнения

II учебен срок (Класна работа № 2)

За II учебен срок предлагаме два варианта за класна работа. Знанията, които проверяваме, са:

- Еднакви триъгълници
  - Признаци за еднаквост на два триъгълника
  - Правоъгълен триъгълник с ъгъл 30°
  - Симетрала на отсечка
- Неравенства
  - Неравенство с едно неизвестно
  - Приложение на линейните неравенства
- Успоредник. Трапец
  - Свойства на успоредника
  - Свойства на трапеца
  - Видове успоредници

I срок, I вариант

1. Коренът на уравнението $(2x-1)^2-(x+1)^2=3x(x+3)-45$ е:

   А) -3; Б) -2; В) 1; Г) 3.

2. При $x=-2\frac{2}{3}$, числената стокйност на израза

   $A=(x-2)^2-(x-4)(x+4)-7(1-x)$ е:

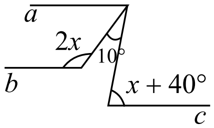
   А) -8; Б) 1; В) 5; Г) 21.

3. Произведението от корените на уравнението $|3x-9|-2|x-3|=2$ е:

   А) 1; Б) 5; В) 6; Г) 8.

4. На чертежа $a \parallel b \parallel c$. Стойността на x е:

   А) $30°$;
   Б) $40°$;
   В) $50°$;
   Г) $60°$.



5. Една тръба може да напълни басейн за 12 часа, а друга – два пъти по-бързо. Първата тръба пълни сама 3 часа, а след това отворили и втората тръба. За колко часа е напълнен басейнът?

6. За $\triangle ABC$ $\alpha:\beta:\gamma=3:4:5$. Ако AD е височина и $DL \parallel AC$ ($L \in AB$), намерете големината на $\sphericalangle ADL$ в градуси.

I срок, II вариант

1. Коренът на уравнението $(x+2)^2-(x+3)(x-3)=5(x-2)$ е:

   А) -18; Б) -10; В) 1; Г) 23.

2. При $x=-1\frac{3}{7}$, стойността на израза

   $A=(2x-3)^2-3(x-2)^2-(x+3)(x-3)-7x$ е:

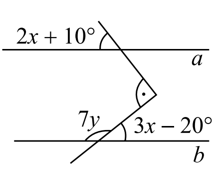
   А) -2; Б) 4; В) 6; Г) 16.

3. Сборът от корените на уравнението $|10-5x|$ - $|x-2|=12$ е:

   А) -1; Б) 4; В) 5; Г) няма решение.

4. На чертежа $a \parallel b$. Стойността на y е:

   А) $30°$;
   Б) $40°$;
   В) $50°$;
   Г) $20°$.

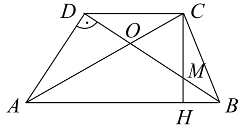


5. Една тръба може да напълни басейн за 6 часа, а друга – 2 пъти по-бавно. Първата тръба пълни сама 3 часа, а след това отворили и втората тръба. Намерете за колко часа е напълнен басейнът.

6. В $\triangle ABC$ $\alpha:\beta:\gamma=2:3:4$. Ако BL е ъглополовяща и $LQ \perp BC$ ($Q \in BC$), намерете големината на $\sphericalangle BLQ$ в градуси.

II срок, I вариант

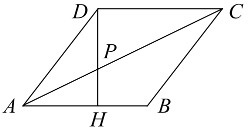
1. Решенията на неравенството $(x+2)^2-(x-1)^2>8x-5$ са:
   А) $x>1$; Б) $x<4$; В) $x<1$; Г) $x>4$.
2. В $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C=90^\circ$) и $\sphericalangle BAC=2\,.\sphericalangle ABC$. Ъглополовящата AL пресича височината CD в точка O. Ако $AL=12$ cm, то дължината на OD в сантиметри е:
   А) 6; Б) 3; В) 4; Г) 2.
3. Външният ъгъл при върха A на $\triangle ABC$ е 105°. Ако симетралата на страната BC пресича страната AC в точка L и $\sphericalangle ABL=\sphericalangle ACB$, големината на $\sphericalangle ABC$ в градуси е:
   А) 35°; Б) 60°; В) 70°; Г) 75°.
4. В трапеца $ABCD$ $\sphericalangle ADB=90^\circ$, $CH\perp AB$, $AB=2.AD$ и $AC=2.CH$. **Не е** вярно, че:
   А) $\triangle BMC\cong\triangle DOC$;
   Б) $\triangle ABD\cong\triangle BAC$;
   В) $\triangle BHC\cong\triangle ODA$;
   Г) $\triangle ADO\cong\triangle BCO$.



5. Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенството
$$\frac{3x-1}{2}-\frac{1}{3}\left(\frac{x+1}{2}-\frac{x+5}{4}\right)>2-\frac{x+8}{12}.$$
6. Външно за ромба $ABCD$, в който $\sphericalangle BAD=40^\circ$, е построен квадратът $DCPQ$. Ако O и O_1 са пресечните точки на диагоналите съответно на ромба и квадрата, намерете големината на $\sphericalangle DO_1O$ в градуси.

II срок, II вариант

1. Решенията на неравенството $(x+1)^2-2(3x+2)<(3-x)^2$ са:
   А) $x>6$; Б) $x<6$; В) $x>7$; Г) $x<7$.
2. В $\triangle ABC$ $\alpha:\beta:\gamma=1:2:3$. Ако CD е височина и $BD=4$ cm, дължината на AD в сантиметри е:
   А) 10; Б) 16; В) 8; Г) 12.
3. Външният ъгъл при върха C на $\triangle ABC$ е 110°. Ако симетралата на страната AB пресича страната AC в точка Q и BQ е перпендикулярна на AC, големината на $\sphericalangle ABC$ в градуси е:
   А) 45°; Б) 60°; В) 65°; Г) 70°.
4. В ромба $ABCD$ ($\sphericalangle A<90^\circ$) от върха D е спусната височина DH към страната AB, която пресича диагонала AC в точка P. **Не е** вярно, че:
   А) $\triangle ABP\cong\triangle ADP$;
   Б) $\sphericalangle CBP=90^\circ$;
   В) $\triangle BPH$ е равнобедрен;
   Г) $PB=PD$.



5. Намерете най-малкото цяло число, което е решение на неравенството
$$\frac{2x+3}{2}-1\frac{1}{3}\left(\frac{x+5}{2}-\frac{x+6}{4}\right)<x-\frac{x+4}{12}.$$
6. Върху отсечката AB е взета точка C. В различни полуравнини относно правата AB са построени квадратите $ACMN$ и $CBPQ$. Ако $\sphericalangle ABN=20^\circ$, намерете големината на $\sphericalangle BNQ$ в градуси.

6 ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКА ХАРАКТЕРИСТИКА НА УЧЕНИЦИТЕ ОТ 7. КЛАС

Преходът от една възрастова група в друга е винаги труден, но пубертетът, когато детето става Юноша, е най-трудният период и най-решаващият в живота на човека. Пубертетната възраст обхваща 11-14 годишната възраст. Според Жан Жак Русо пубертетът е "едно второ раждане" – раждане на човешката личност.

Учениците в седми клас са 13-14-годишни, т.е. те са в края на пубертета, все още деца, но и вече със самочувствието на юноши. Най-ярката им психологическа характеристика е техният стремеж към самостоятелност. Той е свързан със засилена активност и инициативност. Младите хора в тази възраст са изключително импулсивни, често менят мнението си. Те бързо се запалват за някаква изява, но и бързо угасват. Чувстват се пораснали, чувстват нужда от неограничена свобода, но нямат все още собствена мяра в поведението си.

Това е възраст, в която те се вглеждат в себе си, започват сами да се опознават, да се съпоставят с другите. Изостря се чувствителността им – не приемат бележки, критики, поучавания, съвети. Оттук в пубертета идва и известен разрив между детето и родителите, между детето и учителите. Детето-Юноша изисква уважение към собствената си личност, стреми се към независимост. Той не приема директно съвети, защото счита, че са вмешателство в собствения му свят. Може да му се въздейства, ако той участва равноправно в обсъждане на нормите на поведение и самостоятелно стигне до правилното решение.

В пубертета се утвърждава ролята на приятелите. Това може да има положително или отрицателно въздействие. В средата на приятелите детето-юноша може да изяви себе си, може да подражава на добри прояви, но може и да се поддаде на лошо влияние. И това, второто, се случва много по-често, защото е по-силно забележимо и по-интересно. "По-смело" е да е немирен "герой", отколкото примерен и сериозен ученик и приятел. Опасно е в този период децата да не стигнат до тотално отричане на ценности.

В тази възраст започва и се развива интимно-личностното общуване, необходимостта от приятелство с другия пол.

Характерни особености на познавателните възможности на седмокласниците

Учениците от седми клас са вече в края на пубертета, физическото им израстване се отразява положително на техните познавателни възможности, увеличава се психическата им устойчивост. Налице са условия за изграждане на умения за съзнателно преодоляване на трудности, за самостоятелно вземане на решения, за възпитаване на волята. Много от учениците вече са склонни да преодоляват своята крайна самостоятелност и са готови да приемат външна интервенция. Седмокласниците имат нагласа да получават и осмислят нови знания.

С увеличаване на възрастта се увеличават и индивидуалните различия на учениците. За да покажат своята изключителност и оригиналност, младите хора имат нужда от знания и сили, за да мотивират поведението си и да открият своя път.

Учениците в седми клас усвояват учебния материал с по-голяма лекота. Увеличена е бързината на умствената им ориентация. Има условия да се изграждат умения за самостоятелно поставяне и решаване на задачи. Изостря се способността за подбор и критичност в оценките, за съзнателно учене. Нараства издръжливостта при учене. Увеличава се готовността за възприемане на системни структури от знания.

Вниманието се подобрява, но все още се забелязва по-слаба концентрация и неустойчивост при възприемане и усвояване на знания. Това се обуславя най-вече от факта, че учебният материал в седми клас значително е увеличен и усложнен.

Във възрастта на 13-14-годишните паметта е все още силно механична, но вече има нагласа към логични връзки и умозаключения. Ето защо е наложително дейността, свързана със запаметяването, да е по-целенасочена и по-рационална поради по-големия обем и различен по съдържание учебен материал. Положителна роля при взаимодействието между механичната и логическата памет имат моделите, класификациите, таблиците, систематиките при преподаване на учебния материал. Те показват силно въздействие при смисловото запомняне. Удачно е да се свързват нагледно-образни и вербално-понятийни операции, което улеснява запаметяването. При седмокласниците постепенно започва да се изгражда смисловата памет, която се характеризира с по-голяма точност, по-голяма значимост на волята.

Колкото по-трудни са интелектуалните операции, които участват в усвояване на знанията, толкова по-дълго в паметта се задържа получената информация. Затрудненията засилват способността да се запаметява. Затова информацията не трябва да се поднася наготово. Изводът, направен самостоятелно, способства за задържане на знанията в паметта.

Не трябва да се учудваме, че въпреки спазването на всички норми на поведение и преподаване, учениците забравят. Забравянето трябва да се приеме като защитен механизъм, който е естествен за децата. Особено ако полученото знание не е осъзнато като необходимост, то лесно се забравя.

Учителят трябва да знае, че силната памет и запомнянето на факти е необходимо, но не и достатъчно условие за развитие на личността на ученика. При обучението трябва да се развива не само паметта, но и мисленето на децата.

Мисленето започва там, където съзнанието достига до противоречие, което е неразрешимо с познати знания. Мисленето на седмокласниците е понятийно, то е несъвършено поради липса на достатъчно житейски опит и научни данни. Не може да се мисли без знания. При обучението мисленето трябва да се активизира чрез учебния процес и заради учебния процес. За да осигури необходимата база, върху която да се развива мисленето, учителят трябва да намери подходящи начини да се усвои минимумът от знания, върху които ще се откриват (чрез мислене) нови понятия и съждения, нов обем знания. При тази дейност научната информация в паметта се увеличава все повече и повече и създава условия за по-активно мислене. Активизирането на мисловния процес повишава ефективността на познавателната дейност, спомага за оформяне на личността.

Освен осигуряване на усвоени знания, мисленето се активизира и от:

– предизвикана потребност от решаване на конкретна образователна задача, потребност от знания, необходими за решаването ѝ;
– поставяне на правилни въпроси (задачи) за създаване ситуация за вземане на правилно решение;
– регулиране на посоката на непреднамерените асоциации. Предварителното или по време на решаване на задачата припомняне на преди това придобита информация помага за концентриране на мисленето върху новия проблем и създава благоприятни условия за неговото решаване;
– максимално включване на образи;
– подпомагане и управляване на мисленето чрез спомагателни въпроси.

Един от определящите фактори за стимулиране на мисленето са емоциите. Те събуждат специални асоциации, които възбуждат мисловни процеси. Положителните емоции помагат за изграждане на психическа устойчивост на личността.

Учителят и възможностите му за въздействие върху личностното развитие на учениците от 7. клас

За да се справят успешно децата с този труден преход, без да се поддадат на различни отклонения от нормалния път на личностното си развитие, трябва да им се помага. След семейството и приятелите училището играе не малка роля в процеса на израстване на учениците. Ето защо учителят, освен добър професионалист, трябва добре да познава и психическите особености на своите ученици. Така той ще съумее да помогне за смекчаване на възрастовите кризи, за оптимално използване на възможностите, които предлага пубертетът, за изграждане на младия човек.

Личността на учителя много пъти има поразяващ ефект на въздействие върху ученика. Юношата е склонен да подражава на своя учител. Ето защо във възможностите на учителя е да създаде условия, които да подтикнат ученика сам да определи линията на поведение в положителна посока, да съумее да избере добър личностен и професионален път на развитие.

Условията, които учителят създава в учебния час при възприемане и усвояване на знания, са изключително благоприятни за личностната изява на учениците. Умението на учителя може да активизира положителни изяви и да тушира лошите прояви.

Склонността да подражават на приятелите си – това е даденост, която умело може да се използва от учителя, за да подтикне детето да учи повече, да знае повече, да има добро поведение.

В началния период на самосъзнаване и съзнателно опознаване на себе си и другите ролята на учителя за мотивиране на дейностите на учениците е изключително важна. Той трябва умело да се възползва от тяхната възрастова нагласа да възприемат и усвояват нови знания. Като се опре на тяхната преценка и самооценка, може успешно да им помогне да затвърдят вярата в собствените си сили и възможности. Наставленията, поставяне на задачи, за които не са обучени или трудни за тяхната възраст, създават условия за отвращаване на децата от ученето. Степента на трудност на поставените задачи трябва да амбицира, а не да отчайва учениците. Добрият учител трябва да съумее да превърне претенциите на своите ученици за самостоятелност и зрялост в реалност.

Учебният материал в седми клас се усложнява и по обем, и по дълбочина на знанията. Основната задача на учителя е да въоръжи седмокласниците с методи за самостоятелно овладяване на знанията. В това отношение и ролята на учебника не може да се пренебрегне.

Чрез такт и търпение учителят трябва да ръководи незабележимо, но и настойчиво учениците си към необходимите им знания. Нужно е по-голямо доверие в способностите и скритите духовни и психически сили и дадености на децата.

С увеличаване на възрастта се увеличават и индивидуалните различия между учениците. Ето защо учителят трябва да дава възможност за развиване на мисловната им дейност и индивидуалните им способности, да насърчава оригиналността.

Увеличеният обем знания, които са със значителна трудност, води до неустойчивост на вниманието. Изследванията показват, че седмокласниците могат да се концентрират около 30 минути и организацията на учебния час трябва да бъде съобразена с тази възрастова особеност.

7 БЕЛЕЖКИ ВЪРХУ ТЕОРЕТИЧНИТЕ ОСНОВИ НА УЧЕБНОТО СЪДЪРЖАНИЕ *

АЛГЕБРА

В началното развитие на алгебрата нейната най-важна задача е била решаването на уравнения (думата “алгебра” произлиза от арабското название “ал джебр” на един от начините за преобразуване на уравнения). Въвеждането на уравненията е естествен резултат от търсенето на по-леки и по-общи начини за решаване на словесни задачи по аритметика. Така алгебрата възниква като средство за задоволяване нуждите на аритметиката. Обратно, решавайки различни въпроси за изследване на уравненията, алгебрата влияе на аритметиката, като предвижда развитието на понятието “число”.

Алгебрата спомага за развитието и на други науки. Например без векторната алгебра и тензорната алгебра е немислимо развитието на съвременната физика. В тези дялове на алгебрата се изучават обекти,

* Разделът е написан от проф. Георги Паскалев през 1996 г.

които не са с числов характер. За тези обекти (вектори и тензори) се дефинират и решават операции събиране, умножаване и др., подобни на действията събиране и умножаване на числа.

Разглеждайки операциите върху отделни множества (множество на целите числа, множество на рационалните числа, множество на реалните числа, множество на векторите, множество на тензорите, множество на матриците и др.), се установява, че за всеки два елемента на дадено множество, взети в определен ред, еднозначно може да бъде определен трети елемент, наречен техен сбор (или произведение). Като се изучават свойствата, присъщи на всяка операция поотделно върху различни множества, се установяват аналогични свойства, като например комутативност, асоциативност и дистрибутивност на операция. Така възниква необходимост да се даде обща формулировка на свойствата на операциите и да се въведе еднакво символично записване.

Съвременната алгебра се абстрахира от природата на елементите, съставящи множеството, което тя изучава, т.е. алгебрата в широк съвременен смисъл е наука за операции, прилагани над множества от обекти от най-различно естество. Структурата на всяка алгебра се осъществява, като се въведат определени релации между елементите на разглежданото множество и се дефинират операции, които се характеризират с основни твърдения, т.е. на базата на аксиоматичния принцип.

Аксиоматичното изграждане на определен раздел от математиката става по следния начин:

- **Въвеждат се основни понятия и основни релации между тези понятия, които не се дефинират.**
- **Въвеждат се основни твърдения (аксиоми), които установяват връзки между основните понятия и основните релации. Основните твърдения се приемат за верни без доказателство.**
- **Всички нови понятия се дефинират чрез основните понятия и основните релации или чрез по-рано дефинирани понятия и релации.**
- **Всички нови твърдения се доказват въз основа на основните понятия, основните релации, аксиомите и предшестващите доказани твърдения (теореми). Правилата на доказателствата са тези на математическата логика.**

Изграждането на една аксиоматична теория трябва да изпълнява изискванията за **непротиворечивост, независимост** и **пълнота** на аксиомите.

Ще изясним накратко изискванията, на които трябва да отговаря една аксиоматична теория.

Непротиворечивост. Нека P е съждение, отнасящо се до понятия от дадена аксиоматична теория, а $\overline{P}$ е неговото отрицание. Аксиоматичната теория е непротиворечива, ако за всяко съждение P поне едно от съжденията P и $\overline{P}$ е недоказуемо въз основа на аксиомите. Аксиоматичната теория е противоречива, ако съществува съждение P_0 от нея такова, че и P_0, и $\overline{P}_0$ са доказуеми въз основа на аксиомите.

Прието е аксиоматичната теория на Пеано за изграждането на естествените числа да се счита за непротиворечива.

Независимост. Нека A е аксиома на една аксиоматична теория G, а $A_1, A_2, \ldots, A_k$ са отлични от A аксиоми на G. Аксиомата A е независима от $A_1, A_2, \ldots, A_k$, когато не може да се докаже с тяхна помощ. Ако в този случай $A_1, A_2, \ldots, A_k$ са всички отлични от A аксиоми на G, аксиомата A се нарича абсолютно независима в G. Теорията G изпълнява изискването за независимост, когато всичките ѝ аксиоми са абсолютно независими. Ако една аксиома A на G е зависима от останалите аксиоми, тя може да бъде изпусната от списъка на аксиомите и поставена в списъка на теоремите.

Пълнота. Една аксиоматична теория G се нарича пълна, ако за всяко съждение P в нея поне едно от съжденията P и $\overline{P}$ може да се докаже с аксиомите на G. Теорията G се нарича непълна, ако има съждение P_0 в нея такова, че и P_0, и $\overline{P}_0$ са недоказуеми с аксиомите на G.

Според един резултат на Курт Гьодел (1906-1978) в аксиоматичната теория на Пеано за естествените числа съществува съждение P_0, такова, че нито P_0, нито $\overline{P}_0$ могат да се докажат с аксиомите на Пеано. Следователно теорията на естествените числа е непълна.

Всяко множество, елементите на което могат да играят ролята на основните понятия, като изпълняват и аксиомите, се нарича модел на тази аксиоматична теория.

Например ако в една аксиоматична теория са въведени сбор и произведение като основни релации между основните понятия и като аксиоми са взети разместителното, съдружителното и разпределителното свойство, то за неин модел може да служи множеството на рационалните числа. Със същия успех за неин модел може да служи и множеството на многочлените. Разглеждания от подобен характер както в аритметиката, така и в алгебрата са неподходящи за ученици поради високата им степен на абстрактност.

В началните класове на училищния курс по математика се изучава аритметика. С изучаване на отрицателните числа и величините, които могат да се измерват с числа, се навлиза в алгебрата. В края на шести клас, чрез буквената символика, се въвеждат и използват алгебричните изрази.

Ако в един израз се използват само алгебрични действие, той се нарича алгебричен израз.

Ако в един алгебричен израз се използва действието кореняване, той се нарича ирационален израз, а в противен случай – рационален израз. В седми клас се изучават само рационални изрази.

Един рационален алгебричен израз се нарича дробен или цял според това дали в него е използвано действието деление на променлива или не.

Вместо думата "израз" може да се употреби "аналитичен израз" или "формула". Например можем да кажем "аналитичният израз $ax^2 + bx + c$ се нарича квадратен тричлен" или "формулата $ax^2 + bx + c$ при $a \neq 0$ е многочлен на x от втора степен". Един аналитичен израз (формула) може да бъде алгебричен израз или трансцендентен израз. Думата "формула" по-рядко се използва в посочения смисъл. Например казва се "за лице на триъгълник е в сила формулата $S = a\ .\ h_a$", т.е. думата "формула" се използва за равенството, а не за израза $a\ .\ h_a$. Правилно е да се каже: "Лицето на триъгълника се пресмята с израза $a\ .\ h_a$" или "лицето на триъгълника се пресмята по формулата $a\ .\ h_a$". В учебника сме писали: "Равенствата $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ и т.н. са известни като формули за съкратено умножение." Това сме направили, за да не нарушим традицията. Смисълът е, че например $a^2 + 2ab + b^2$ е формула (израз) за $(a + b)^2$.

Ще направим две бележки за понятията "тъждествено равни изрази" и "тъждества". Два тъждествено равни израза не е задължително да съдържат едни и същи букви. Например изразите $a^2 + 1$ и $a^2 + b + (1 - b)$ са тъждествено равни, макар че вторият съдържа, а първият не съдържа буквата b. Два тъждествено равни израза не е задължително да имат едни и същи допустими стойности. Например изразите $\frac{x^2-4}{x-2}$ и $x + 2$ са тъждествено равни и равенството $\frac{x^2-4}{x-2} = x+2$ е тъждество, макар че числото 2 за втория израз е допустима стойност, а за първия не е. Изискването за тъждествено равни изрази е те да имат равни числени стойности за всички стойности на буквите, които са допустими едновременно и за двата израза.

Обикновено в учебниците по математика, които въвеждат алгебрата, се използва понятието "алгебричен сбор". Под алгебричен сбор на няколко величини трябва да се разбира израз на тези величини, в който те са свързани последователно със знаците за събиране и изваждане. Например тъждествено равните изрази $-3x^3 + 4xy^2 - 2y^3$; $+(-3x^3) - (-4xy^2) - 2y^3$; $-3x^2 + 4xy^2 + (-2y^3)$ са алгебрични сборове съответно на едночлените $3x^3$, $4xy^2$, $2y^3$; $-3x$, $-4xy$, $2y^3$; $3x^2$, $4xy^2$, $-2y^3$. Всеки от тях е тъждествено равен на сбора:

$(-3x^3) + 4xy^2 + (-2y^3)$ на едночлените $-3x^3$, $4xy^2$, $-2y^3$.

Названието алгебричен сбор произлиза от това, че изразът може да се представи като сбор на величини от същото естество. За това обаче е нужно разглежданите величини да имат противоположни величини. В този смисъл не може да се говори за алгебричен сбор в множеството на естествените числа. Например изразът $8 - 3 + 4 - 2$ има смисъл в множеството на естествените числа, но той не може да се напише като $8 + (-3) + 4 + (-2)$, тъй като -3 и -2 не са естествени числа.

ГЕОМЕТРИЯ

Първото аксиоматично изграждане на геометрията е дадено около 300 години пр.н.е. от гръцкия математик Евклид. Основният му труд "Начала" (в латинизиран превод "Елементи") се състои от 13 книги, съставени по определена схема: отначало се дават определения, постулати и аксиоми, а след това се изказват теореми и им се дават доказателства. Ето някои определения, постулати и аксиоми:

Определения: 1. Точка е онова, което няма части. 2. Линията е дължина без ширина. 3. Границите на линията са точки. 4. Правата е такава линия, която е еднакво разположена спрямо всички свои точки. 5. Повърхнина е онова, което има само дължина и ширина. 6. Границите на повърхнината са линии. 7. Равнината е повърхнина, която е еднакво разположена по отношение на всички прави, лежащи в нея. 8. Равнинният ъгъл е взаимно наклонение на две пресичащи се прави, разположени в една равнина.

Постулати: 1. Изисква се през всяка точка да може да се прекара права към всяка друга точка. 2. И всяка права да може да се продължи неопределено. 3. И от всеки център да може да се опише окръжност с произволен радиус. 4. И всички прави ъгли да са равни. 5. И всеки път, когато правата при пресичане с две други прави образува с тях вътрешни едностранни ъгли, сумата на които е по-малка от два прави тези прави да се пресичат откъм онази страна, от която сумата е по-малка от две прави.

Аксиоми: 1. Равните поотделно на трето са равни помежду си. 2. И ако към равни прибавим равни, ще получим равни. 3. И ако от равни извадим равни, ще получим равни. 4. И ако към неравни прибавим равни, ще получим неравни. 5. И ако удвоим равните, ще получим равни. 6. И половините на равните са равни помежду си. 7. И съвпадащите са равни. 8. И цялото е по-голямо от частта. 9. И две прави не могат да заключват пространство.

Термините "постулат" и "аксиома" означават едно и също нещо – основно, изходно съдържание.

Заслуга на Евклид е, че той пръв е поставил въпроса за логическо обосноваване на геометрията. Недостатък на "Началата" е, че дадената в тях система от аксиоми и постулати е недостатъчна за последователно изграждане на геометрията. Обаче повече от 2000 години те са били пример на научна строгост и са служили като образец за всички съчинения по геометрия до началото на XIX век.

Евклид прави разлика между дефиниции, аксиоми (очевидни твърдения) и постулати (геометрични изисквания). Мориц Паш (1843-1930) забелязва, че в аксиоматиката на Евклид трябва да се приемат допълнителни аксиоми за релацията "между" и че дефинираните от Евклид първични понятия не трябва да се дефинират, а следва да се задават чрез свойствата, които им предписват аксиомите. На тази база Давид Хилберт (1862-1943) поставя геометрията на строго аксиоматична основа чрез работата си "Основи на геометрията" (1899 г.).

Аксиоматичният метод е бил прилаган от много математици в конкретни проблеми и преди Хилберт. В наивна форма методът е въведен от Евклид. Архимед (287-212 г. пр.н.е) разширява списъка на постулатите на Евклид и въвежда теорията на измерването на дължините, лицата и обемите. Той развива статиката на аксиоматична основа. Известни са механичните постулати на Исак Нютон (1643-1727), аритметичните аксиоми на Джузепе Пеано (1858-1932), геометричните аксиоматични работи на Паш. Голямата заслуга на Хилберт е в анализа и в изяснянето, които той прави на ролята на аксиомите и основните понятия в логическото изграждане на една математическа дисциплина.

Ако A и B са две аксиоматични теории, изградени чрез своите основни понятия, релации и аксиоми, може да се изгради модел A' на A в B чрез избрано съответствие F, т.е. моделът A' е една част от аксиоматичната теория B.

Моделите могат да се използват в две посоки. Ако теорията В или част от нея е модел на теорията A, няма нужда в B да се доказват онези съждения, които са съответни чрез F на съждения от A. Така при изграждане на една теория B ще се спести труд, който е полаган при изграждането на друга теория A. От друга страна, с моделите могат да се решават и някои принципни въпроси. Нека например е известно, че теорията B е непротиворечива. Тогава, ако съществува модел на друга теория A в B, следва, че и теорията A е непротиворечива. Наистина ако допуснем, че A е противоречива, то в A ще съществуват две съждения S и $\overline{S}$, които са отрицание едно на друго и които се доказват с аксиомите на A. Но тогава и съжденията S' и $\overline{S'}$ в B ще са доказуеми въз основа на аксиомите на B (понеже имаме модел) и ще следва, че и теорията B е противоречива. Следователно, ако една аксиоматична теория A притежава модел в непротиворечива аксиоматична теория B, то и A е непротиворечива. Ако искаме да докажем, че теорията B е непротиворечива, трябва да построим неин модел в непротиворечива теория C. Същото трябва да направим за C и т.н. Тъй като този процес не може да продължава неограничено, нужно е някоя теория да се приеме за непротиворечива. За такава теория, вече споменахме, че се приема аксиоматичната теория на Пеано за естествените числа. Непротиворечивостта на Евклидовата теория се доказва чрез построяване на неин модел в теорията на естествените числа (вж. например книгата "Основи на математиката" на Петканчин).

Пълнотата на една аксиоматична теория може да се докаже условно, като се построи модел на тази теория в друга аксиоматична теория, за която се знае, че е пълна.

Същото може да се каже и за независимостта на аксиоматична теория. Ще се спрем по-подробно на това изискване за Евклидовата геометрия. Един от постулатите на Евклид заема особено място между останалите аксиоми и постулати. Това е петият постулат. Той не притежава простотата и нагледността на останалите аксиоми. Това е давало повод да се мисли, че той може да се докаже въз основа на останалите аксиоми, след което да се постави в списъка на теоремите. Считало се е, че Евклид не е успял да докаже тази теорема и затова я е поставил като аксиома. В продължение на две хиляди години стотици математици и особено нематематици правили опити да докажат петия постулат. Всички тези опити са били неуспешни. Край на тези опити поставя откритието на неевклидовата геометрия от Николай Лобачевски (1792-1856) и Янош Бояй (1802-1860). За всички "доказателства" на петия постулат по-късно се е установявало, че те в скрита форма са използвали като аксиома някакво съждение, което е еквивалентно на петия постулат, т.е. за доказването на което е необходим петият постулат.

Лобачевски решил да допусне, че петият постулат не е верен, т.е. че през всяка точка, нележаща на дадена права, може да се прекара не една, а поне две (и следователно безброй много) прави, успоредни на дадената. Това твърдение се нарича “аксиома на Лобачевски”. Въз основа на своето допускане Лобачевски първоначално се е надявал, че рано или късно ще получи някакво противоречие, развивайки логическите следствия от него. Ако такова противоречие се явяло, това би означавало, че допускането на Лобачевски е погрешно, с което петият постулат би бил доказан. Въпреки усилията си обаче противоречие Лобачевски не получил. Той продължил да развива системно и упорито логическите следствия от своята аксиома и получил цяла нова теория, но търсеното противоречие се криело упорито. Така Лобачевски достигнал до извода, че между неговата аксиома и останалите аксиоми на Евклидовата геометрия не съществува логическо противоречие. Следователно аксиомата за успоредните прави е логическо положение, което е съвършено независимо от останалите аксиоми на Евклидовата геометрия. Изградената от Лобачевски теория въз основа на въведената от него аксиома за успоредни прави, отричаща петия постулат на Евклид, е нова геометрия. Нея Лобачевки нарекъл “Въображаема”, а днес тя се нарича геометрия на Лобачевски.

Математическата дисциплина, която може да се изгради върху основните понятия, основните релации и аксиомите на инцидентността, нареждането, конгруентността и непрекъснатостта (без аксиомата на успоредността), въведени в аксиоматичното изграждане на Евклидовата геометрия от Хилберт, се нарича абсолютна геометрия. Ако към абсолютната геометрия се прибави аксиомата на успоредността, получава се Евклидовата геометрия. Отрицанието на аксиомата на успоредността е:

Аксиома на Лобачевски: За всяка права g и всяка неинцидентна с нея точка G съществуват поне две различни прави през G, които са успоредни на g.

Ако към абсолютната геометрия се прибави аксиомата на Лобачевски, получава се геометрията на Лобачевски. Непротиворечивостта на геометрията на Лобачевски се доказва, като се построи неин модел в Евклидовата геометрия (вж. например книгата “Основи на математиката” на Петканчин). От това следва и независимостта на петия постулат, както и на аксиомата на Лобачевски, от всички аксиоми на абсолютната геометрия.

Отношението към аксиомите в една аксиоматична теория, след работата на Лобачевски, коренно се променя. Първо, аксиомата не е “истина”, защото ако петият постулат е “истина”, отрицанието му е “неистина”, а петият постулат е “неистина” в геометрията на Лобачевски, а отрицанието му е “истина” в нея. Второ, аксиомата не е нещо “очевидно”, защото в “очевидността” има подчертано психологически, а не логически елемент и следователно има субективен характер. Има аксиоми, които съвсем не изглеждат “очевидни” и дори са по-малко “очевидни” от теореми, които се доказват с тяхна помощ. Трето, несъстоятелно е да се твърди, че аксиомата не се нуждае от доказателство, защото съждение, което се взема за аксиома при някакъв ред на аксиоматично изграждане на една дисциплина, може да се окаже теорема при друг начин на аксиоматично изграждане на същата дисциплина.

8 ИСТОРИЧЕСКИ БЕЛЕЖКИ ВЪРХУ ТЕМАТИКАТА НА УЧЕБНИКА ПО МАТЕМАТИКА ЗА 7. КЛАС

АЛГЕБРА

Задачи, в които се търси неизвестна величина, се срещат още в най-древните математически текстове от около второто хилядолетие пр.н.е. По това време са били в разцвет двете велики цивилизации на древния Изток – египетската и вавилонската, възникнали в долините на Нил и Двуречието на Тигър и Ефрат ("Двуречието" се нарича още "Месопотамия", което идва от гръцки език).

По-голямата част от математическите текстове, запазили се в паметниците на древния Египет, са написани на папирус (хартия, приготвена от стеблото на едноименното растение). В папирусите фигурират задачи, които по същество се свеждат до уравнения от първа степен с едно неизвестно. Неизвестното е означено с йероглиф, който се нарича "хау" (означава "купчина" в смисъл на "количество"). Съществуват различни тълкувания на решенията на въпросните уравнения, които египтяните дават. Най-вероятно те са използвали метода, който много по-късно в средновековна Европа е получил името "Метод на невярното предположение".

Източници за изучаване на математиката на Вавилон са математическите клинописни текстове върху глинени таблички. Въпросните текстове съдържат главно задачи за пресмятане и също както египетските имат предимно учебен характер. Открояват се широк клас алгебричини задачи, които показват, че вавилонската математика е била далеч по-съвършена от египетската.

В VI век пр.н.е. развитието на математиката рязко се ускорило. В сборниците, достигнали до нас от древна Гърция, наблюдаваме съвсем ново явление – раждането на математическа наука, основана на строги доказателства. В древна Гърция първоначално решавали уравненията геометрично като след извършване на редица построения са намирали отсечки, с които са представяли положителните корени на уравнението.

В средата на III век от н.е. е живял и работил един от най-големите математици на древността – Диофант. Неговото основно произведение "Аритметика" показва възкресяване на числената алгебра след вавилонците. В действителност построяването на алгебрата на основата на аритметиката, а не на геометрията, е започнало още през елинистичната и римската епоха. Числени квадратни уравнения е решавал Херон. Диофант положително е имал и други предшественици, обаче до нас не са достигнали сведения нито за хората, нито за трудовете, на които би могъл да се опре този бележит алгебрист. При Диофант се появила буквената символика. Неизвестното той наричал "числото" и го означавал със символа ζ. Ето някои други негови означения: $x^\circ - M$, $x - S$, $x^2 - \Delta^\nu$.

Диофант дълго време не е имал сериозни последователи в развитието на буквената символика.

В началото на второто хилядолетие пр.н.е. по бреговете на Хуанхъ и Яндзъ е възникнала китайската цивилизация. Първата китайска държава се е появила през епохата Ин (XVIII-XII век пр.н.е.). В течение на много векове се издавали и преиздавали “Математика в девет книги”, последните от които са написани през III-VI век. От тези класически книги съдим, че китайците са разглеждали редица задачи, които се свеждат до системи линейни уравнения. Те били решавани по революционния за времето си метод “фан-чен”.

Една от най-старите цивилизации с хилядолетна история е индийската, възникнала в долината на Инд. От V до XII век в Индия, както и във Вавилон и Китай, голям разцвет са получили алгебричните пресмятания. Индийците наричали алгебрата “биджаганита”, което означава “изкуство да се смята с елементи”, или “авиактаганита” – “изкуство да се смята с неизвестни”. Най-голямото постижение на индийските математици било създаването на развита алгебрична символика, по-богата дори от диофантовата. За първи път се появили специални знаци за много неизвестни величини, за свободния член на уравнението, за степените. Повечето от символите представлявали първите срички на съответните санскритски термини. Индийците са наричали неизвестното “йават-тават”, което означава “толкова-колкото”.

През VII век и първата половина на VIII век арабите, които населявали Арабския полуостров, завладели обширни територии и много народи. Била създадена огромна държава, наречена Арабски халифат. Големи научни центрове станали градовете Багдад, Самарканд, Хорезм и Бухара. По това време автор на основния арабски трактат по алгебра “Кратка книга за смятането с ал-джабар и ал-мукабала” станал Мохамед Ал Хорезм (от думата “ал-джабар” е произлязло и сегашното наименование “алгебра”; тя означава “възстановяване”, а “ал-мукабала” означава “противопоставяне”). Ал-джабар и ал-мукабала били двете основни правила, които Ал Хорезм е използвал за решаването на уравнения. Интересно е да се отбележи, че арабският математик е въвел уравненията без никаква символика, т.е. словесно.

През 1202 г. италианският математик Леонардо Пизански (Фибоначи) написал известната “Книга за абака”, където използвал трудовете на математиците от Арабския халифат и древна Гърция (“абак” е старинен сметачен уред, наподобяващ днешното сметало). Освен другия материал в книгата се решават и уравнения. Авторът пръв в Европа употребил отрицателните числа. (Най-старата книга, достигнала до нас, в която се срещат отрицателните числа, е “Десет класически трактата” – сборник от трудове на древни китайски учени, съставен от Чжен-фан през VII век. Счита се, че някои от тези трудове датират от преди II век пр.н.е.). По това време и в следващите няколко века математическата работа в Европа се е състояла главно в постепенното усвояване на резултатите, получени по-рано от гърци, индийци и араби.

В края на XV век в Европа започнало интензивно разработване на алгебричната символика. Тя се е създавала едновременно в Германия, Италия, Франция и навсякъде по различни пътища вървяли към една цел. Този процес се проточил две-три столетия и бил окончателно завършен от Рене Декарт и неговите последователи.

Франсоа Виет (1540-1603) създал първото общо буквено смятане за алгебрата. Така е станало възможно изследването на алгебрични уравнения в общ вид и въвеждането на общи формули. Виет е използвал в качеството на коефициенти главните латински съгласни букви B, D, G, ..., а главните гласни A, E, O, ... – за означаване на неизвестните величини.

Възпитаникът на Оксфордския университет Томас Хариот (1560-1621) също усъвършенства алгебричната символика. За означаване на известните и неизвестните величини той използва малки букви от латинската азбука. Още по времето когато Виет е бил младеж, а Хариот не е бил роден – 1557 г., Робър Рекърд пръв е въвел знака за равенство като го мотивирал по следния начин: “Никои два предмета не могат да бъдат по-равни помежду си от две успоредни отсечки”. 34 години по-късно Хариот пръв е въвел знаците за неравенство като се мотивирал така: “Ако две величини не са равни, то отсечките, фигуриращи в знака за равенство, вече не са успоредни, а се пресичат. Пресичането може да стане от ляво или от дясно. В първия случай образуваният знак за неравенство ще означава “по-малко”, във втория – “по-голямо”. (Символите $<$ и $>$ били въведени през 1734 г. от френския математик Пиер Буге.)

Рене Декарт (1596-1650) означавал коефициентите с малките начални букви на латинската азбука a, b, c, ..., а неизвестните величини с последните букви x, y, z. Той не е използвал скоби (употребата на скоби е утвърдена в трудовете на френския математик Албер Жирар (1595-1632)). Знакът за равенство на Декарт наподобявал легнала осмица. Буквената символика била усъвършенствана от известния английски физик и математик Исак Нютон (1643-1727). Изобщо всички учебници по алгебра през XVIII век са били под силното влияние на неговата “Всеобща аритметика”, написана през 1707 г. и многократно преиздавана. Интересно е да се отбележи, че вместо скоби Нютон е поставял хоризонтална черта над израза.

Освен Нютон забележителни постижения в алгебрата по това време имали Колин Маклорен (1698-1746), Алексис Клод Клеро (1713-1768) и Леонард Ойлер (1707-1783).

Едва в края на XVIII век е осъществен съвременния начин за записване на уравнения и техните решения.

ГЕОМЕТРИЯ

Задачите за намиране на лица на геометрични фигури са възникнали от практиката в най-дълбока древност. Още египтяните са пресмятали лицата на правоъгълници, триъгълници и трапеци по точни правила, а лицето на произволен четириъгълник по прибилижено правило. Подобни задачи са решавали и вавилонците. Тези народи не са използвали термини като “фигура” и “страна на фигура”. Говорело се е примерно за “нива” със съответни “ширина” и “дължина”.

През първата половина на VI век пр.н.е. е живял и работил “бащата на гръцката наука” Талес – търговец, политик, философ, астроном и математик. Той е доказал, че ъглите при основата на равнобедрения триъгълник са равни; открил, че при пресичането на две прави се получават равни ъгли; доказал теоремата за еднаквост на два триъгълника, които имат равни страна и два ъгъла. Предполага се, че Талес в своите доказателства широко е използвал прегъване и налагане на фигури.

Около 530 г.пр.н.е. на остров Самос е роден легендарният гръцки учен Питагор. На Питагор принадлежи първото построяване на геометрията като дедуктивна наука. Но той е отричал всички абстракции. По негово мнение не можело да се говори за линии без ширина и за точки, които нямат никакви размери, понеже никой не ги е виждал. Това негово виждане било променено от Демокрит и Евдокс.

През III век пр.н.е. Евклид написва своите тринадесет книги, наречени “Елементи”. Това удивително произведение е просъществувало повече от две хиляди години и още не е загубило значението си за математиката. Създадената в “Елементи” система на евклидовата геометрия и сега се изучава във всички училища по света и стои в основата на почти цялата практическа дейност на хората. Изборът на постулатите и аксиомите в “Елементи” е твърде сполучлив. Почти всички са влезли в съвременната аксиоматика.

Областта на величините, които се определят от тези аксиоми, е била прекалено широка, за да може в нея да се дефинира понятието “отношение”. Евдокс е въвел знаменитата аксиома, която е известна и като аксиома на Архимед и фигурира в “Елементи”:

“Казва се, че величини имат отношение помежду си, когато те, взети кратно, могат да се надминат една друга.”

Днес дефинираме основните понятия “точка”, “права”, “равнина” със система аксиоми, въведена от Давид Хилберт (1862-1943).

Петият постулат на Евклид е учудвал учените със сложността на формулировката си. Още в древността са се опитвали да го заменят с друго, по-очевидно твърдение. Прокъл през V век от н.е. дава съвременната формулировка на постулата. През 1966 г. Имре Тот, въз основа на анализ на няколко текста на Аристотел, стига до извода, че преди Евклид са били изучавани неевклидови геометрични системи. Това е наложило и сложната формулировка на Евклид, който положително е можел да даде и различни други по-лесни форми на постулата за успоредните.

По времето на Евклид са работили и други велики геометри – Архимед и Аполоний. Тяхното творчество е забележително със своите красиви идеи.

През следващите два века в геометрията не било постигнато нещо принципно ново.

В първите векове на новата ера Александрия станала научен център на древния свят. Там са работили Херон, Менелай и Клавдий Птоломей, които съживили развитието на геометрията.

Математиците на древен и средновековен Китай са разполагали с доказателствата на редица геометрични теореми, но тяхната геометрия имала малко общо с дедуктивната наука от гръцки образец.

В Индия не е имало специални съчинения по геометрия. Геометричните сведения в математическите книги са били привеждани без доказателства, но са били много добре онагледени. Индийците не са решавали построителни задачи.

Голямо място в геометрията на Арабския халифат са заемали въпросите, свързани с прилагането на изчислителни методи. За нуждите на земемерството, архитектурата и техниката са били разработвани и методите на геометричните построения. Ибрахим ибн Синан (908-946), Абу Саид ас Сиджизи (X-XI в.), Абу Насър ал Фараби (870-950) и други арабски учени са посветили свои произведения на различни геометрични построения. Редица учени са се занимавали с теорията на успоредните, правили са коментари върху евклидовите "Елементи" – Ибн Ал Хайсам, Омар Хаям и др.

Геометрията по време на научната револкзция през XVII и XVIII век е свързана с прекалено сложна за учениците в 7. клас материя.

9 ЗАБАВНА МАТЕМАТИКА ВЪРХУ ТЕМАТИКАТА НА УЧЕБНИЯ МАТЕРИАЛ В 7. КЛАС

АЛГЕБРА

Задача 1. Иван смята много бързо. Той може да умножава наум две двуцифрени числа с еднакви десетици, сумата от единиците на които е 10, като например $x = 83 \,.\, 87$.

$$8 \,.\, 9 = 72$$
$$3 \,.\, 7 = 21$$
$$x = 7221$$

Общовалидността на това правило за съкратено умножения трябва да се установи с помощта на променливи.

Решение: Нека първият множител е равен на $10a + b$, където a и b са естествени числа и $1 \le a, b \le 9$. Тогава вторият множител е равен на $10a + (10 - b)$ и се получава:

$$(10a + b)(10a + 10 - b) = 100a^2 + 100a - 10ab + 10ab + 10b - b^2 =$$
$$= 100a(a + 1) + b(10 - b)$$

За разглежданата задача е изпълнено:

$$83 \,.\, 87 = 100 \,.\, 8 \,.\, 9 + 3 \,.\, 7 = 7221.$$

Следователно произведението се получава, като се умножат десетиците на първото число с увеличените с едно десетици на второто число и зад получения резултат се напише произведението на единиците. Ако произведението на единиците е по-малко от 10, трябва да се прибави и цифрата 0.

Задача 2. Намислете си трицифрено естествено число, за което стотиците са поне с две по-големи от единиците, а единиците са число, различно от нула. Разместете стотиците от единиците и така полученото число извадете от намисленото число. Към получения резултат прибавете числото, което се получава пак с разместване на стотиците и единиците в резултата. Като сума се получава винаги числото 1089. Докажете това с помощта на променливи.

Решение: Нека $100a + 10b + c$ е намисленото число, където $a - c \ge 2$ и

$c > 0$. Ако от него се извади $100c + 10b + a$, ще се получи $100(a - c) + (c - a)$.

Последното се преобразува до $100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$. Като се прибави към него числото $100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$, ще се получи сумата 1089.

Задача 3. Пътувам в трамвая и забелезвам, че успоредно на трамвайната линия, но в противоположна посока върви приятелят ми. След една минута, на спирката аз слязох от трамвая и забързах към приятеля си, движейки се два пъти по-бързо от него и четири пъти по-бавно от трамвая. След колко минути ще догоня приятеля си?

Решение: Приемаме за 1 разстоянието, което е изминал трамваят от момента, когато забелязах другаря си до момента на спирането.

През това време приятелят ми изминава $\frac{1}{8}$ и ще се намира от мен на разстояние $1\frac{1}{8}$; тъй като скоростта ми надвишава скоростта на приятеля ми с $\frac{1}{8}$, аз ще го догоня след 9 минути.

Задача 4. При един контролен пункт за измерване на скоростта в населено място една лека кола изминала контролната отсечка от 200 метра за време t равно на 10 секунди. Спазвал ли е водачът правилникът за движението?

Решение: $v = \frac{s}{t} = \frac{0,2.3600}{10} = 72$ **;** $v = 72$ km/h.

Отговор: Водачът не е спазвал правилника, защото е превишил допустимата максимална скорост в населено място (60 km/h).

Задача 5. Моника завоювала третото място в състезание по стрелба с малокалибрена пушка. Победителката Боряна улучила четири ринга повече от Моника и два – повече от Мария, която заела второто място. Моника улучила $\frac{4}{5}$ от общия брой на възможните рингове. Ако се съберат числата на улучените от трите момичета рингове, ще се получи $2\frac{1}{2}$ пъти от броя на всичките възможни рингове. Какъв е този брой? По колко ринга е улучило всяко от момичетата?

Решение: Нека n е максималният брой рингове, които може да улучи един стрелец. Тогава на Моника се падат $\frac{4}{5}n$ ринга, на Боряна $\frac{4}{5}n + 4$ ринга, а на Мария $\frac{4}{5}n + 2$ ринга. Заедно трите момичета улучили $\frac{12}{5}n + 6$ ринга. Уравнението: $\frac{12}{5}n + 6 = \frac{5}{2}n$ има решение $n = 60$.

Един стрелец би могъл да улучи най-много 60 ринга. Боряна улучила 52, Мария – 50, а Моника – 48 ринга.

Задача 6. Георги попитал Виктор какви числа е задраскал във фиша си за ТОТО 2. Виктор отговорил следното: “Сумата на задрасканите числа е 175. Второто число е с 5 по-голямо от първото, петото е с 2 по-голямо от четвъртото. Третото число е просто число, по-голямо от 20, но по-малко от 30. Шестото число е три пъти по-голямо от първото. Сумата на първото и второто число е равна на четвъртото число.” Какви числа е задраскал Виктор?

Решение: Първо число: n. Второ число: $n + 5$. Трето число: 23 или 29. Четвърто число: $2n + 5$. Пето число: $2n + 7$. Шесто число: $3n$.

Или $9n + 40 = 175$; $n = 15$ или $9n + 46 = 175$; $9n = 129$.

Последното n не изпълнява условието, понеже 129 не е кратно на 9. Виктор е задраскал числата: 15, 20, 23, 35, 37, 45.

Старинни задачи:

Задача 7. (Мохамед ибн Муса ал-Хоризми IX в.) Разделил съм 10 на две части, едната от които дели другата. Частното им е 4.

Решение: Двете части са 8 и 2, защото $8 : 2 = 4$.

Задача 8. (Адам Рис XVI в.) И тъй един син запитал баща си колко е стар. Бащата му отговорил така: “Ако ти имаше моите години, половината им, четвъртината им и още една година, щеше да си на 134 години.”

Решение: $x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 134, \quad x = 76$.

Следователно бащата е на 76 години.

Задача 9. (Леонти Магницки XVII в.) Един баща запитал учителя на сина си колко деца обучава. Учителят отговорил: “Ако имах още толкова ученици, колкото имам сега, а след това още половината и още четвъртината и освен това и сина ти, ще станат точно 100.”

Решение: $x + x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 1 = 100, \quad x = 36$

Учителят обучавал 36 ученици.

Задача 10. (Леонард Ойлер XVIII в.) Числото 25 да се разложи на две събираеми по такъв начин, че по-голямото събираемо да е 49 пъти по-голямо от по-малкото събираемо.

Решение: $x + 49x = 25, \quad x = \frac{1}{2}$

По-малкото събираемо е равно на $\frac{1}{2}$, а по-голямото – на $24\frac{1}{2}$.

Задача 11. (Томас Едисон XIX в.) Едисон бил много остроумен в измислянето на духовити шеги. Често пъти многобройните му гости се чудели защо градинската врата пред къщата му се отваряла с такова голямо усилие. Най-после един от приятелите на великия изобретател му казал: “Един такъв технически гений, като теб, все пак може да построи градинска врата, която да работи както трябва.” Едисон отвърнал усмихнат: “Моята врата е с напълно разумно устройство. Аз съм я свързал с цистерната. Всеки, който идва при мен, ми помпи по 20 литра вода в цистерната.” Ако Едисон беше използвал 25 литров съд вместо 20 литров, щяха да са необходими 12 поситители по-малко за напълване на цистерната. Каква е вместимостта на цистерната?

Решение: $20x = 25(x - 12)$, $x = 60$.
Обемът на цистерната е равен на 1200 литра.

Анекдот: Карл Фридрих Гаус (1777-1855) още като ученик се отличавал със съобразителност и духовитост. Един ден неговият учител по смятане казал:
– Гаус, поставям ти два въпроса. Ако отговориш правилно на първия, на втория може да не отговаряш. И тъй: колко иглички има една коледна елха?
– 67534 – отговорил Гаус без колебание.
– Как стигна тъй бързо до това число?
– Господин учителю, това вече е вторият въпрос – отговорил хитро Гаус.

Софизми:

1 $1 = 0$?
От равенството $x - a = 0$, чрез деление с $x - a$, получаваме $\frac{x-a}{x-a} = \frac{0}{x-a}$, т.е. $1 = 0$.

Грешката се дължи на използването на твърдението: Ако x е произволно число, съществува еднозначно число $\frac{x}{x}$ и то е числото 1. Това твърдение не е вярно при $x = 0$.

2 $2 = 1$?
Нека $a = b$. Имаме последователно:
$a^2 = ab$, $a^2 - b^2 = ab - b^2$, $(a + b)(a - b) = b(a - b)$.
Делим с $a - b$ и получаваме $a + b = b$, т.е. $b + b = b$, $2b = b$, делим с b и получаваме $2 = 1$.
Грешката се дължи на делението на $a - b$, което е равно на 0, тъй като $a = b$.

3 $5 = 7$?
Нека числото a да е $1\frac{1}{2}$ пъти по-голямо от числото b, т.е. $a = \frac{3}{2}b$. Като умножим двете части по 4, получаваме $4a = 6b$, но
$4a = 14a - 10a$ и $6b = 21b - 15b$. Тогава
$14a - 10a = 21b - 15b$, $15b - 10a = 21b - 14a$, $5(3b - 2a) = 7(3b - 2a)$.
Като се разделят двете части на $3b - 2a$ ще получим $5 = 7$.
Грешката се дължи на делението на $3b - 2a = 0$ (от $a = \frac{3}{2}b$).

4 Всеки две числа са равни.
Нека са дадени две произволни, различни едно от друго числа. С a означаваме по-голямото от тях, а с b – по-малкото. Тогава $c = a - b > 0$, откъдето $(a - b)^2 = c^2$. От друга страна
$(a - b)^2 = (a - b)c$, $a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc$.

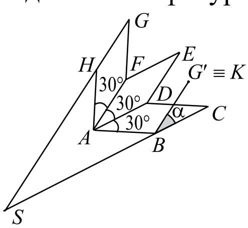
Чрез почленно събиране на последното равенство с тъждеството
$-ac + ab - b^2 = -ac + ab - b^2$
получаваме
$a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$ или $a(a - b - c) = b(a - b - c)$
Делим на $a - b - c$ и получаваме $a = b$.
Грешката се дължи на делението на $a - b - c = 0$.

5 От $a > 0$, $b > 0$ следва както $a > b$, така и $b > a$.
От условието следва $a > -b$, $b > -b$. Умножаваме почленно двете неравенства и получаваме: $ab > b^2$. Понеже $b > 0$, то $a > b$.
Аналогично от $b > -a$, $a > -a$ следва $ab > a^2$. Но $a > 0 \Rightarrow b > a$.
Грешката се дължи на почленното умножение на двете еднопосочни неравенства, при което се получава невярното неравенство $ab > b^2$.
Ще поясним с пример: От $3 > -5$, $5 > -5$ не следва $3 \,.\, 5 > 25$.

6 Съществува отрицателно положително число.
Нека са дадени числата a и $b < a$. Умножаваме $a > b$ с $b - a$. Получаваме $a(b - a) > b(b - a)$, т.е. $ab - a^2 > b^2 - ab$, откъдето $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 < 0$. Понеже $a \neq b$, то $a - b \neq 0$, т.е. $(a - b)^2 > 0$. Следователно $(a - b)^2$ е положително и същевременно е отрицателно.
Грешката се дължи на умножаването с $b - a < 0$.

ГЕОМЕТРИЯ

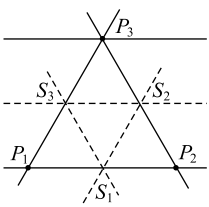
Задача 1. На фигурата са изобразени три ветрилоподобно разположени еднакви ромба с остър ъгъл 30°. На колко е равен ъгълът α , който сключват правите BC и HG?



Решение: Нека K е точка, която лежи от онази страна на правата AB, от която е F, и нека $BK \parallel AF$. Тогава $BK \parallel HG$ и$BC \parallel AD$, а от $\sphericalangle FAD = 30°$ следва $\sphericalangle KBC = 30°$. Затова правите BC и HG се пресичат под ъгъл $\alpha = \sphericalangle KBC = 30°$.

Задача 2. Дадени са три точки P_1, P_2 и P_3, които не лежат на една права. Постройте права, от която трите точки са еднакво отдалечени. Колко такива прави има? След извършване на построението какво твърдение можете да изкажете за пресечните точки на получените прави?

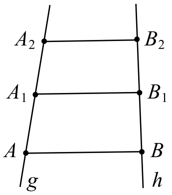
Решение: Една права с исканото свойство построяваме по следния начин:
Начертаваме съединителната права на две от дадените точки и през третата дадена точка построяваме права, успоредна на нея. Равноотдалечената права от начертаните две успоредни прави изпълнява исканото условие. Тези три прави се пресичат две по две в точките S_1, S_2 и S_3, които разполовяват отсечките, определени от дадените точки.



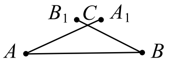
Задача 3. (Софизъм на Прокл) През V век пр.н.е. древногръцкият математик Прокл разгледал един забележителен математически парадокс от геометрично естество, който днес носи неговото име, макар и да не е установено кой точно е авторът му. Софизмът на Прокл твърди, че никои две различни прави в една равнина не се пресичат.

Нека са дадени двете различни прави g и h в една равнина. Нека A и B са две точки от g и h, различни една от друга (такива очевидно има). Върху правите g и h построяваме такива точки A_1 и B_1, че $AA_1 = BB_1 = \dfrac{AB}{2}$, както е посочено на фигура 1. Отсечките AA_1 и BB_1 не се пресичат, защото, както личи на фигура 2, бихме имали (ако C е пресечната им точка):

(1) $AC + BC < AA_1 + BB_1 = AB$.



Фигура 1



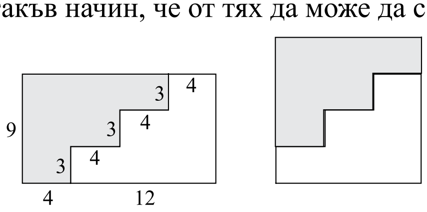
Фигура 2

При равенство в (1) правите g и h биха съвпаднали с AB, противно на предположението; при неравенство се получава противоречие на факта, че сумата от дължините на двете страни в триъгълника е по-голяма от третата страна.

Върху правите g и h построяваме такива точки A_2 и B_2, че $A_1A_2 = B_1B_2 = \dfrac{A_1B_1}{2}$, както е посочено на фигура 1. И отсечките A_1A_2 и B_1B_2 нямат обща точка по съображения, подобни на изложените по-горе. Този процес може да се продължи неограничено. Следователно правите g и h не се пресичат.

В основата на този забележителен парадокс лежи заблуждението – неразбиране на това, което трябва да се докаже. Доказано е в горните разглеждания съвсем строго и безупречно следното: двойките отсечки AA_1 и BB_1, A_1A_2 и B_1B_2 и т.н. нямат обща точка. Това е наистина така, но не това е, което трябваше да се докаже. Трябва да се докаже не, че тези двойки отсечки нямат обща точка, а че правите g и h нямат обща точка. Не съществува никаква гаранция, че тези прави не се пресичат в точка, принадлежаща например на отсечките AA_1 и B_1B_2 или A_1A_2 и BB_1 или A_1A_2 и B_3B_4 и т.н. В действителност винаги, когато две прави се пресичат, това става в двойка отсечки от вида на последните двойки отсечки, както и да изберем първоначалните точки A и B.

Задача 4. Как може да се раздели правоъгълник със страни $a = 16$ cm и $b = 9$ cm на две части по такъв начин, че от тях да може да се сглоби квадрат?



Решение: Ако с x се означи дължината на страната на търсения квадрат, ще имаме $x^2 = 16 \,.\, 9 = 144$ и следователно $x = 12$. Близо е до ума да се разреже даденият правоъгълник чрез “стъпаловидно” сечение, както е показано на чертежа.

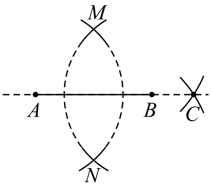
Задача 5. Дължината на страната $BC = a$ на триъгълника ABC е равна на 5 cm, а дължината на страната $AC = b$ на същия триъгълник е равна на 3 cm. Да се построят всички онези триъгълници, две от страните на които имат тези дължини и периметрите им са естествени числа, делящи се на 3. Колко триъгълника от такъв вид могат да бъдат построени? За всеки от възможните триъгълници намерете дължината на страната $AB = c$ и съответния периметър.

Решение: Изпълнена е теоремата: Сборът от две страни на триъгълника е по-голяма от третата страна. От $a + b = 8$ следва $c < 8$. Периметърът $a + b + c = 8 + c$ трябва да се дели на 3. Това е така за $c = 7$ и $c = 4$. Има точно два триъгълника, които изпълняват посочените условия:

$a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 7$ cm, $p = 15$ cm
$a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm, $p = 12$ cm

Решаване на задачи за построение само с помощта на пергел

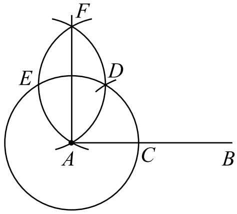
Задача 6. По две точки само с помощта на пергел може да се построи безкрайно множество точки, принадлежащи на правата, която минава през двете дадени точки.



Фигура 3

Решение: Дадени са точките A и B. Построяваме с пергела две точки M и N, симетрични спрямо търсената права AB (фиг. 3). След това от точките M и N, като от центрове с еднакъв радиус, който не е равен на MB, описваме малки дъгички, които да се пресичат. Получените точки C, C_1, C_2 са от правата AB. (Да се докаже за точка C.) Този процес може да продължи неограничено, като се изменя разтворът на пергела.

Задача 7. Само с помощта на пергел от дадена точка A към правата AB да се издигне перпендикуляр.



Фигура 4

Решение: От точката A (фиг. 4), като от център, описваме окръжност с произволен радиус AC. Със същия радиус от точка C описваме малка дъгичка върху окръжността. Получаваме точка D. От точка D, като от център, със същия радиус описваме дъга AEF, а от E, като от център, със същия радиус описваме дъга ADF. Правата, определяна от точките A и F, ще бъде перпендикулярна на AB. (Да се докаже.)

КАЛЕНДАР

2008

	Септември				
Пн	1	8	15	22	29
Вт	2	9	16	23	30
Ср	3	10	17	24	
Чтв	4	11	18	25	
Пт	5	12	19	26	
Сб	6	13	20	27	
Н	7	14	21	28	

	Октомври				
Пн		6	13	20	27
Вт		7	14	21	28
Ср	1	8	15	22	29
Чтв	2	9	16	23	30
Пт	3	10	17	24	31
Сб	4	11	18	25	
Н	5	12	19	26	

	Ноември				
Пн		3	10	17	24
Вт		4	11	18	25
Ср		5	12	19	26
Чтв		6	13	20	27
Пт		7	14	21	28
Сб	1	8	15	22	29
Н	2	9	16	23	30

	Декември				
Пн	1	8	15	22	29
Вт	2	9	16	23	30
Ср	3	10	17	24	31
Чтв	4	11	18	25	
Пт	5	12	19	26	
Сб	6	13	20	27	
Н	7	14	21	28	

2009

	Јануари				
Пн		5	12	19	26
Вт		6	13	20	27
Ср		7	14	21	28
Чтв	1	8	15	22	29
Пт	2	9	16	23	30
Сб	3	10	17	24	31
Н	4	11	18	25	

	Февруари				
Пн		2	9	16	23
Вт		3	10	17	24
Ср		4	11	18	25
Чтв		5	12	19	26
Пт		6	13	20	27
Сб		7	14	21	28
Н	1	8	15	22	

	Март					
Пн		2	9	16	23	30
Вт		3	10	17	24	31
Ср		4	11	18	25	
Чтв		5	12	19	26	
Пт		6	13	20	27	
Сб		7	14	21	28	
Н	1	8	15	22	29	

	Април				
Пн		6	13	20	27
Вт		7	14	21	28
Ср	1	8	15	22	29
Чтв	2	9	16	23	30
Пт	3	10	17	24	
Сб	4	11	18	25	
Н	5	12	19	26	

	Мај				
Пн		4	11	18	25
Вт		5	12	19	26
Ср		6	13	20	27
Чтв		7	14	21	28
Пт	1	8	15	22	29
Сб	2	9	16	23	30
Н	3	10	17	24	31

	Јуни				
Пн	1	8	15	22	29
Вт	2	9	16	23	30
Ср	3	10	17	24	
Чтв	4	11	18	25	
Пт	5	12	19	26	
Сб	6	13	20	27	
Н	7	14	21	28	

БЕЛЕЖКИ

БЕЛЕЖКИ