**ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ "ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ" – СОФИЯ**

**РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ**

**КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА**
**16. 07. 2010 г.**

**ПЪРВИ ВАРИАНТ**

**ЗАДАЧА 1:** а) Да се реши уравнението $\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=1$.

б) Да се реши уравнението $2.4^x-7.2^x-4=0$.

в) Три числа, чиято сума е равна на 21, образуват растяща геометрична прогресия. Ако от тези числа извадим съответно 2, 1 и 3, се получават числа, които в този ред образуват аритметична прогресия. Да се намерят членовете на геометричната прогресия.

**Решение:** а) **(3 точки)** DM: $\begin{cases} x+3\ge 0 \\ 2x-1\ge 0 \end{cases} \Rightarrow x\in\left[\frac{1}{2};\infty\right)$.

От $\sqrt{x+3}=\sqrt{2x-1}+1 \Rightarrow x+3=1+2\sqrt{2x-1}+2x-1$, откъдето получаваме

$$2\sqrt{2x-1}=3-x \Rightarrow \left|\begin{array}{c} 3-x\ge 0 \\ 4(2x-1)=9-6x+x^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{c} x\le 3 \\ x^2-14x+13=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} x_1=1<3 \\ x_2=13>3 \end{array}\right..$$

Следователно $x_1=1\in DM \Rightarrow$ е решение.

б) **(2 точки)** Полагаме $2^x=t, t>0 \Rightarrow 2t^2-7t-4=0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} t_1=4>0 \\ t_2=-1/2<0 \end{array}\right. \Rightarrow 2^x=4 \Rightarrow x=2$ е решение.

в) **(2 точки)** Нека дадените числа са $a; b; c \Rightarrow \div a-2; b-1; c-3 \Rightarrow \left|\begin{array}{c} a+b+c=21 \\ ac=b^2 \\ a-2+c-3=2(b-1) \end{array}\right.$,

откъдето получаваме $a+c=2b+3 \Rightarrow b+2b+3=21 \Rightarrow b=6 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a+c=15 \\ ac=36 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a_1=3 \\ c_1=12 \end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{l} a_2=12 \\ c_2=3 \end{array}\right.$.

Но геометричната прогресия е растяща, следователно членовете на прогресията са 3;6;12.

**ЗАДАЧА 2:** а) Да се намерят стойностите на реалния параметър $m\ne 0$, за които уравнението $mx^2-x-2=0$ има два различни реални корена, по-малки от 2.

б) Ако $\sin x=\frac{3}{5}$ и $x\in(90^\circ;180^\circ)$, да се намери стойността на израза

$$A=\sin^3 x-\cos^3 x.$$

math-bg.com

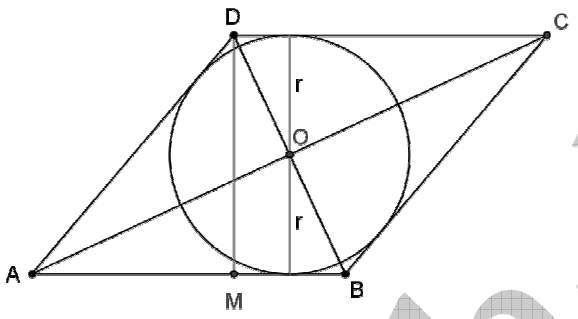
**Решение:** а) **(2 точки)** Нека $f(x)=mx^2-x-2;\ a=m,\ b=-1, c=-2$. Даденото уравнение има два различни реални корена, по-малки от 2, когато са в сила неравенствата:

$$\left|\begin{array}{l} D>0 \\ af(2)>0 \\ -\dfrac{b}{2a}<2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} 1+8m>0 \\ 4m(m-1)>0 \\ \dfrac{1}{2m}<2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} m>-\dfrac{1}{8} \\ m(m-1)>0 \\ \dfrac{1-4m}{2m}<0 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} m\in\left(-\dfrac{1}{8};+\infty\right) \\ m\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty) \\ m\in(-\infty;0)\cup\left(\dfrac{1}{4};+\infty\right) \end{array}\right. \Rightarrow m\in\left(-\frac{1}{8};\ 0\right)\cup(1;+\infty).$$

б) **(1 точка)** От $\sin x=\dfrac{3}{5}$ и $x\in(90^\circ;180^\circ)\Rightarrow \cos x=-\dfrac{4}{5}\Rightarrow A=\sin^3 x-\cos^3 x=\dfrac{91}{125}$.

**ЗАДАЧА 3:** Лицето на ромб е равно на 24 $cm^2$, а сумата от дължините на диагоналите му е равна на 14 $cm$. Да се намерят лицето на вписания в ромба кръг и синусът на острия ъгъл на ромба.

**Решение:** **(4 точки)** Нека ромбът е $ABCD(AC>BD)$, $AC\cap BD=O$.




От $S_{ABCD}=\dfrac{AC.BD}{2}=24\Rightarrow AC.BD=48\Rightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} AC.BD=48 \\ AC+BD=14 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} AC=8 \\ BD=6 \end{array}\right..$$

От $\Delta AOB\Rightarrow AB^2=16+9=25\Rightarrow AB=5$.

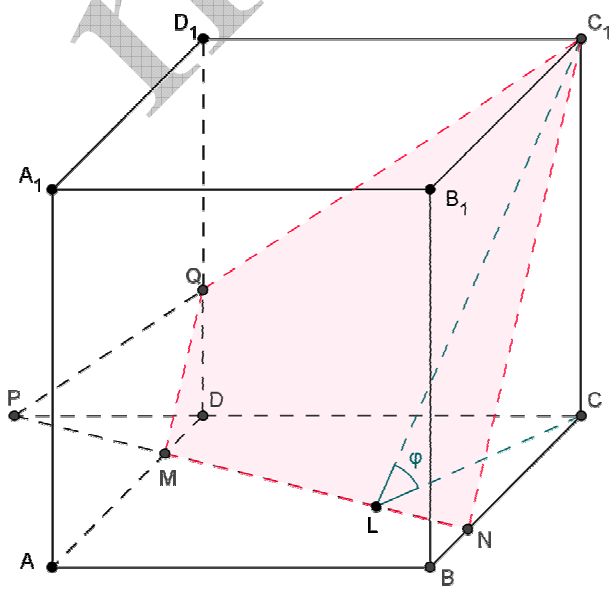
От $S_{ABCD}=AB.DM\Rightarrow DM=\dfrac{24}{5}\Rightarrow r=\dfrac{1}{2}DM=\dfrac{12}{5}$.

Следователно $S_{кръг}=\pi r^2=\dfrac{144}{25}\pi$. От $\Delta AMD\Rightarrow \sin\angle MAD=\dfrac{DM}{AD}=\dfrac{24}{25}$.

**ЗАДАЧА 4:** В куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ телесният диагонал има дължина $\sqrt{48}$. Точките $M$ и $N$ лежат съответно върху ръбовете $AD$ и $BC$, така че $AM:MD=CN:NB=3:1$. Да се намерят:

а) косинусът на ъгъла между равнината $(MNC_1)$ и равнината на основата $ABCD$;

б) лицето на сечението на куба с равнината $(MNC_1)$.




**Решение:** а) **(4 точки)** Нека $AB=BC=AA_1=a\Rightarrow AC_1^2=AC^2+CC_1^2=3a^2=48\Rightarrow a=4$.

Следователно $CN=AM=3;\ DM=BN=1$. Построяваме $P=MN\cap CD;\ PC_1\cap DD_1=Q$.

math-bg.com

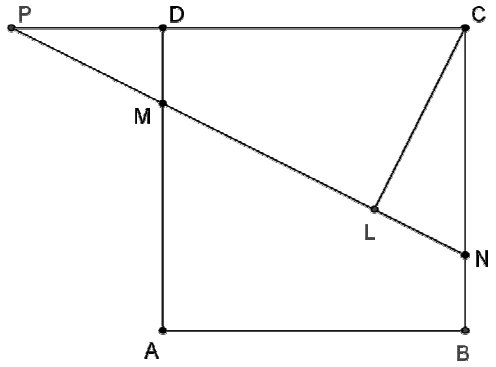
Построяваме $CL \perp MN$, $CL$ е ортогонална проекция на $C_1L \Rightarrow C_1L \perp MN$ (по теоремата за трите перпендикуляра). Следователно

$\angle((MNC_1),(ABCD)) = \angle C_1LC = \varphi \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{CL}{C_1L}$.

$\Delta PDM \sim \Delta PCN \Rightarrow \dfrac{PD}{PC} = \dfrac{MD}{NC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow PD = 2$.

От $PN^2 = PC^2 + CN^2 = 45 \Rightarrow PN = 3\sqrt{5}$.

От $\Delta PCN \Rightarrow CL.PN = PC.CN \Rightarrow CL = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$.




От $\Delta LCC_1 : LC_1^2 = LC^2 + CC_1^2 = \dfrac{116}{5} \Rightarrow LC_1 = \dfrac{2\sqrt{29}}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\cos\varphi = \dfrac{6}{2\sqrt{29}} = \dfrac{3\sqrt{29}}{29}$.

б) **(2 точки)** От направените построения сечението на куба с равнината $(MNC_1)$ е четириъгълника $MNC_1Q$, който е трапец защото $(BCC_1B_1) \parallel (ADD_1A_1) \Rightarrow NC_1 \parallel MQ$. Ортогоналната проекция на сечението $MNC_1Q$ върху основата $ABCD$ е трапеца $MNCD$.

От формулите $S_{MNC_1Q} = \dfrac{S_{MNCD}}{\cos\varphi}$, $S_{MNCD} = \dfrac{MD+CN}{2}DC = 8 \Rightarrow S_{MNC_1Q} = \dfrac{8\sqrt{29}}{3}$.

*Оценката се формира по формулата:*

***Оценка*=2+0,2.*k***, *където к е сумата от получените точки.*

math-bg.com