

ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ “ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ” – СОФИЯ

**КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
16. 07. 2009 г.**

ТРЕТИ ВАРИАНТ

РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧА 1: Дадено е уравнението $4^x - 5 \cdot 2^x + m + 1 = 0$, където m е реален параметър.

- a) Да се реши уравнението при $m=3$.
- б) Да се намерят стойностите на параметъра m , за които даденото уравнение има единствено решение.

РЕШЕНИЕ:

- a) **(2 точки)** Полагаме $2^x = u$, $u > 0$ (Д.М.)

$$u^2 - 5u + 4 = 0 \Rightarrow u_1 = 1 \in \text{Д.М.} \quad u_2 = 4 \in \text{Д.М.}$$

$$2^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0; \quad 2^x = 4 \Rightarrow x_2 = 2.$$

- б) **(3 точки)** Полагаме $2^x = u$, $u > 0$ (Д.М.)

$$u^2 - 5u + m + 1 = 0.$$

Даденото уравнение има единствено решение, когато:

Случай 1) $D = 0$, $u_1 = u_2 > 0$ $D = (-5)^2 - 4(m+1) = 0 \Rightarrow 25 - 4m - 4 = 0 \Rightarrow$

$4m = 21 \Rightarrow m = \frac{21}{4} \Rightarrow u = \frac{5}{2} > 0$ следователно $m = \frac{21}{4}$ е решение на задачата.

Случай 2) $\begin{cases} u_1 \leq 0 \\ u_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{5 - \sqrt{D}}{2} \leq 0 \\ u_2 = \frac{5 + \sqrt{D}}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow u_1 u_2 \leq 0 \Rightarrow m + 1 \leq 0 \Rightarrow m \leq -1.$

Общо решение $m \in (-\infty, -1] \cup \{\frac{21}{4}\}$.

ЗАДАЧА 2: а) За геометрична прогресия е дадено $\begin{cases} a_1 - a_5 = 15 \\ a_1 + a_3 = 20 \end{cases}$. Да се намери сумата

на първите пет члена на прогресията.

- б) Да се реши уравнението $3 \cos 2x + 2 \sin^2 2x = 0$.

РЕШЕНИЕ:

- a) **(2,5 точки)** $a_3 = a_1 q^2$, $a_5 = a_1 q^4$. Тогава системата е

$$\begin{cases} a_1 - a_1 q^4 = 15 \\ a_1 + a_1 q^2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1(1 - q^4) = 15 \\ a_1(1 + q^2) = 20 \end{cases}. \text{ Тъй като } 1 + q^2 \neq 0, a_1 \neq 0$$

$\frac{1 - q^4}{1 + q^2} = \frac{15}{20} \Rightarrow 1 - q^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow q^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{2}, q_2 = -\frac{1}{2}$. От второто уравнение на

системата получаваме: $a_1 = \frac{20}{1+q^2} = \frac{20}{1+\frac{1}{4}} = 16$. Следователно има две прогресии, които

удовлетворяват условието.

1) $16, 8, 4, 2, 1, \dots$ със $S_5 = 31$ и

2) $16, -8, 4, -2, 1, \dots$ със $S_5 = 11$.

б) (2,5 точки) $3\cos 2x + 2(1 - \cos^2 2x) = 0 \Rightarrow 3\cos 2x + 2 - 2\cos^2 2x = 0 \Rightarrow$

$2\cos^2 2x - 3\cos 2x - 2 = 0$. Полагаме $\cos 2x = u \in [-1, 1]$

$$2u^2 - 3u - 2 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 2 \notin [-1, 1] \\ u_2 = -\frac{1}{2} \in [-1, 1] \end{cases}. \text{ Тогава}$$

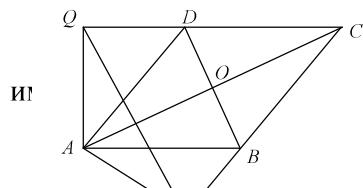
$\cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos 120^\circ \Rightarrow 2x = \pm 120^\circ + k \cdot 360^\circ$.

$x = \pm 60^\circ + k \cdot 180^\circ (k = 0, \pm 1, \dots)$.

ЗАДАЧА 3: Даден е ромб $ABCD$ с острът ъгъл при върха A . От върха A са построени перпендикуляри AP и AQ към правите BC и CD ($P \in BC, Q \in CD$), като $AP = AQ = 3$ и $PQ = 3\sqrt{3}$. Да се намерят:

- а) ъглите и дължината на страната на ромба;
 б) разстоянието между центровете на описаните около ΔABC и ΔAPQ окръжности.

РЕШЕНИЕ:



а) (2 точки) По косинусовата теорема за ΔAPQ

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2AP \cdot AQ \cdot \cos \angle PAQ$$

$$(3\sqrt{3})^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cos \angle PAQ$$

$$18 \cos \angle PAQ = -9 \Rightarrow \cos \angle PAQ = -\frac{1}{2} \Rightarrow \angle PAQ = 120^\circ.$$

От четириъгълника $APCQ$ намираме

$$\angle BCQ = 360^\circ - \angle APC - \angle AQC - \angle PAQ = 60^\circ. \text{ Ъглите на ромба са } 60^\circ \text{ и } 120^\circ.$$

ΔAPB е правоъгълен с $\angle ABP = \angle BAD = 60^\circ$ (като кръстни ъгли). Тогава $\frac{AP}{AB} = \sin 60^\circ$. Следователно $AB = \frac{3}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

б) (3 точки) За да определим разстоянието, трябва да намерим центровете на двете окръжности. Точка D е център на описаната около ΔABC окръжност, защото $DA = DC$ като страни на ромба, а $DB = DA$, защото ΔABD е равностранен (той е равнобедрен с $\angle 60^\circ$).

$\Delta APB \cong \Delta AQC$ (правоъгълни с $\angle 60^\circ$ и $AB = AD$) $\Rightarrow PB = QC \Rightarrow PC = QC \Rightarrow C$ лежи на симетралата на PQ . Но $AP = AQ$ по условие $\Rightarrow A$ също е от симетралата. Следователно AC е симетралата на PQ и центърът на описаната около ΔAPQ окръжност лежи на AC .

$$\text{Намираме } S_{APQ} = \frac{1}{2} AP \cdot AQ \cdot \sin \angle PAQ = \frac{9\sqrt{3}}{4}. \quad \text{От друга страна}$$

$$S_{APQ} = \frac{AP \cdot AQ \cdot PQ}{4R} \Rightarrow \frac{3 \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3}}{4R} = \frac{9\sqrt{3}}{4} \Rightarrow R = 3.$$

По косинусова теорема за ΔABC намираме

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ, \text{ т.e.}$$

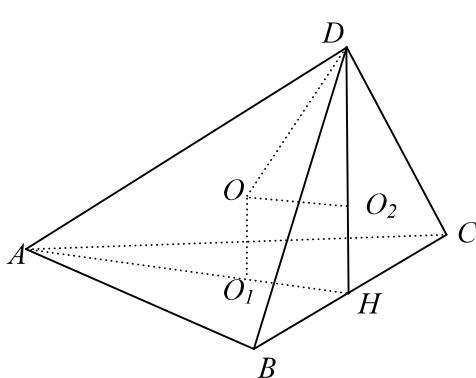
$$AC^2 = 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 36 \Rightarrow AC = 6. \quad \text{Тогава } AO = \frac{1}{2} AC = 3 = R,$$

където O е пресечна точка на диагоналите, т.e. центърът на описаната около ΔAPQ окръжност е точка O .

Търсеното разстояние е равно на отсечката $OD = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AB = \sqrt{3}$.

ЗАДАЧА 4: В триъгълна пирамида $ABCD$ околният ръб $AD=a$, $BD=CD$ и стената BCD е перпендикулярна на основата ABC . Всеки от ъглите при върха D е с големина 60° . Да се намери:

- а) обемът на пирамидата;
- б) радиусът на описаната около пирамидата сфера.



РЕШЕНИЕ: а) (2 точки)

Нека $BD=CD=x$. От $\angle BDC = 60^\circ \Rightarrow$

ΔBCD - равностранен $\Rightarrow BC = x$ и

$DH = \frac{x\sqrt{3}}{2}$ - височина в ΔBCD

По косинусовата теорема за ΔABD имаме

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2AD \cdot BD \cdot \cos 60^\circ$$

$$AB^2 = a^2 + x^2 - ax \quad (1).$$

От ΔABH ($DH \perp BC \Rightarrow AH \perp BC$) $\Rightarrow AH^2 = AB^2 - BH^2 = a^2 + x^2 - ax$.

От ΔADH - правоъгълен $\Rightarrow AH^2 = AD^2 - DH^2 = a^2 - \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow$

$$a^2 + \frac{3}{4}x^2 - ax = a^2 - \frac{3}{4}x^2 \Rightarrow x = \frac{2a}{3} \Rightarrow BC = \frac{2a}{3}, AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \text{ и } DH = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Следователно } S_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{a^2\sqrt{6}}{9} \Rightarrow V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot DH = \frac{a^3\sqrt{2}}{27}.$$

б) (3 точки) Центърът O на описаната сфера е пресечната точка на перпендикулярите, издигнати от центровете на описаните около ΔABC и ΔBCD окръжности. Нека O_1 и O_2 са центровете на тези окръжности.

$$\text{За } \Delta BCD \text{ имаме } DO_2 = \frac{2}{3}DH = \frac{2a\sqrt{3}}{9}.$$

Търсим радиуса и центъра на описаната около ΔABC окръжност.

От $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (по две страни и ъгъл между тях) $\Rightarrow AB = AC \Rightarrow O_1$ лежи на височината AH .

$$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{6}}{9} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4AO_1} \quad (2).$$

$$\text{От (1)} \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + \frac{4}{9}a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}. \text{ Заместваме в (2) и получаваме}$$

$$AO_1 = \frac{7a\sqrt{6}}{36}.$$

В ΔAHD перпендикулярите, издигнати от точките O_1 и O_2 , се пресичат в т. O и радиусът на описаната сфера е $R = DO$.

От $\Delta OO_2 D$ (правоъгълен) намираме:

$$R = \sqrt{OO_2^2 + DO_2^2} = \sqrt{O_1H^2 + DO_2^2} = \sqrt{(AH - AO_1)^2 + DO_2^2} = \frac{a\sqrt{38}}{12}.$$

Оценката се формира по формулата

:

$$\text{Оценка} = 2 + 0,2 k,$$

където k е сумата на получените точки.