ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ "ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ" – СОФИЯ

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
25. 04. 2009 г.

ПЪРВИ ВАРИАНТ

ЗАДАЧА 1: Да се решат уравненията:

а) $\sqrt{\frac{16x}{x-1}}+\sqrt{\frac{x-1}{16x}}=\frac{5}{2}$;

б) $5^{\log_3\left(x^2-2x\right)}=5$.

Решение: а) (2,5 точки) DM: $\begin{cases} x\neq 0 \\ x-1\neq 0 \\ \frac{x}{x-1}\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(1;\infty)$. Полагаме $\sqrt{\frac{16x}{x-1}}=t,\quad t\geq 0$.

$$t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow 2t^2-5t+2=0\Leftrightarrow\begin{cases} t_1=2 \\ t_2=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{\frac{16x}{x-1}}=2\Rightarrow 4x=x-1\Rightarrow x=-\frac{1}{3}\in DM \\ \sqrt{\frac{16x}{x-1}}=\frac{1}{2}\Rightarrow 64x=x-1\Rightarrow x=-\frac{1}{63}\in DM\end{cases}$$

б) (2,5 точки) DM: $x^2-2x>0\Rightarrow x\in(-\infty;0)\cup(2;\infty)$.

$$5^{log_3\left(x^2-2x\right)}=5\Leftrightarrow log_3\left(x^2-2x\right)=log_3 3\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=3\in DM \\ x_2=-1\in DM\end{cases}.$$

ЗАДАЧА 2: Дадено е уравнението $x^2+(\sin\alpha)x-\sin^2\frac{\alpha}{2}=0$, където α е реален параметър. Да се намерят:

а) стойностите на параметъра α, за които уравнението има два равни реални корена;

б) стойността на израза $A=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, където x_1 и x_2 са корените на уравнението при $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

Решение: а) (2 точки) Уравнението има два равни реални корена $\Leftrightarrow$

$$D=0\Leftrightarrow D=sin^2\alpha+4sin^2\frac{\alpha}{2}=0\Leftrightarrow 4sin^2\frac{\alpha}{2}cos^2\frac{\alpha}{2}+4sin^2\frac{\alpha}{2}=0\Leftrightarrow 4sin^2\frac{\alpha}{2}\left(cos^2\frac{\alpha}{2}+1\right)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\frac{\alpha}{2}=0\Rightarrow\alpha=2k\pi,\ k\in Z \\ \cos^2\frac{\alpha}{2}+1=0\ н.р.\end{cases}.$$

math-bg.com

б) (3 точки) $A=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$. От формулите на Виет $\left|\begin{array}{l} x_1+x_2=-sin\alpha \\ x_1x_2=-sin^2\frac{\alpha}{2}\end{array}\right.$ получаваме

$$A=\frac{-sin\alpha}{-sin^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2sin\frac{\alpha}{2}cos\frac{\alpha}{2}}{sin^2\frac{\alpha}{2}}=2cotg\frac{\alpha}{2}.$$ От $cos\alpha=-\frac{1}{3}\Rightarrow sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-cos\alpha}{2}=\frac{2}{3}$.

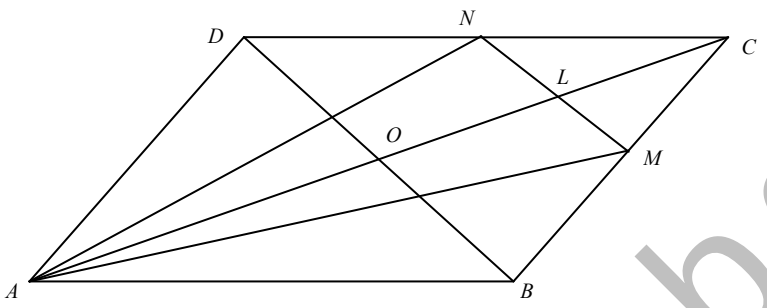
Но $\frac{\alpha}{2}\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}\Rightarrow cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{1-sin^2\frac{\alpha}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow A=-\sqrt{2}$.

ЗАДАЧА 3: Даден е успоредник $ABCD$. Точките M и N са среди съответно на BC и DC. Да се намерят :

а) отношението между лицата на ΔAMN и успоредника $ABCD$;

б) лицето на успоредника $ABCD$ при $AC=p, BD=q$ и $\angle MAN=\alpha$.

Решение: а) (2 точки) AN медиана в ΔDAC. Нека $S_{ABCD}=S\Rightarrow S_{\Delta DAN}=\frac{1}{2}S_{\Delta DAC}=\frac{1}{4}S_{ABCD}=\frac{S}{4}$.



Аналогично $S_{\Delta ABM}=\frac{S}{4}$. От MN средна отсечка в ΔBCD следва, че $\Delta MCN\sim\Delta BCD$.

$$\Rightarrow S_{\Delta MCN}=\frac{1}{4}S_{\Delta BCD}=\frac{1}{8}S$$
$$\Rightarrow S_{\Delta AMN}=S-S_{\Delta AND}-S_{\Delta ABM}-S_{\Delta MCN}$$
$$\Rightarrow S_{\Delta AMN}=S-\frac{S}{4}-\frac{S}{4}-\frac{S}{8}=\frac{3}{8}S.$$

Следователно $\frac{S_{\Delta AMN}}{S_{ABCD}}=\frac{3}{8}$.

б) (3 точки) От MN средна отсечка в ΔBCD следва $MN=\frac{q}{2}$. CO - медиана в ΔBCD

$$\Rightarrow CL=\frac{1}{2}CO=\frac{p}{4}\Rightarrow AL=\frac{3p}{4}.\ S_{\Delta AMN}=\frac{AM.AN.sin\alpha}{2}.$$

От косинусовата теорема за ΔAMN имаме $MN^2=AN^2+AM^2-2AM.AN.cos\alpha$.

При $\cos\alpha\neq 0$,т.е. $\alpha\neq\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow AM.AN=\frac{AN^2+AM^2-\frac{q^2}{4}}{2\cos\alpha}$.

AL е медиана в ΔAMN

$$\Rightarrow AL^2=\frac{1}{4}\left(2AN^2+2AM^2-MN^2\right)\Rightarrow 4.\frac{9p^2}{16}=2AN^2+2AM^2-\frac{q^2}{4}\Rightarrow AN^2+AM^2=\frac{9p^2+q^2}{8}.$$

$$\Rightarrow AM.AN=\frac{\frac{9p^2+q^2}{8}-\frac{q^2}{4}}{2\cos\alpha}=\frac{9p^2-q^2}{16\cos\alpha}.$$

$$S_{ABCD}=\frac{8}{3}S_{\Delta AMN}=\frac{8}{3}\frac{AM.AN.sin\alpha}{2}=\frac{4\left(9p^2-q^2\right)}{3.16}tg\alpha=\frac{\left(9p^2-q^2\right)}{12}tg\alpha.$$

math-bg.com

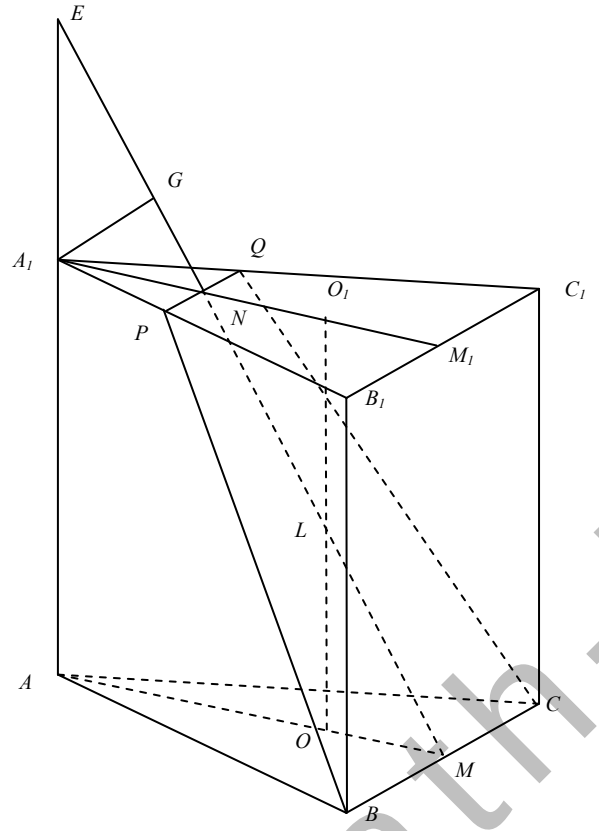
При $\cos\alpha = 0$ ΔAMN е правоъгълен с прав ъгъл при върха A и $AL = \frac{1}{2}MN$, откъдето $3p = q$. В този случай съществуват безброй много такива успоредници, всеки от които се определя от един параметър, например ъгъла между диагоналите $\varphi \in (0;\, \pi)$. Тогава $S_{ABCD} = \frac{3p^2 \sin\varphi}{2}$.

ЗАДАЧА 4: Всички ръбове на правилна триъгълна призма $ABCA_1B_1C_1$ са равни на 2. Точка L е среда на отсечката, свързваща центровете на двете основи. През точка L и ръба BC е построена равнина α. Да се намерят:

а) лицето на сечението на равнината α с призмата;

б) разстоянието от върха A_1 до равнината α.

Решение: а) (2,5 точки)



Нека M е среда на BC, M_1 – среда на B_1C_1.

В равнината (AMM_1A_1): $ML \cap A_1M_1 = N$.

$\Delta LOM \cong \Delta LO_1N_1 \Rightarrow O_1N = OM = \frac{1}{3}AM = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

През т. N построяваме права $PQ \parallel BC$

$(P \in A_1B_1;\, Q \in A_1C_1) \Rightarrow BCQP$ е търсеното сечение, което е равнобедрен трапец $(\Delta BB_1P \cong \Delta CC_1Q \Rightarrow BP = CQ)$.

От $\Delta A_1PQ \sim \Delta A_1B_1C_1 \Rightarrow$

$PQ = \frac{1}{3}B_1C_1;\, MN = 2LM,\, NM \perp BC \Rightarrow MN$ е височина в $BCQP$.

$\Delta LOM \Rightarrow LM = \sqrt{LO^2 + OM^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow MN = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

$S_{BCQP} = \frac{BC + PQ}{2}MN = \frac{2 + \frac{2}{3}}{2}.\frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$.

б) (2,5 точки) $AM \perp BC;\, AA_1 \perp BC \Rightarrow (AMN) \perp BC$. Нека $MN \cap AA_1 = E$. В равнината (EAM) от A_1 издигаме перпендикуляр към ME

$(A_1G \perp ME;\, G \in ME) \Rightarrow A_1G \perp MN;\, A_1G \perp PQ((AMN) \perp PQ) \Rightarrow A_1G$ е търсеното разстояние.

$\Delta A_1NE \sim \Delta AME \Rightarrow \frac{A_1N}{AM} = \frac{1}{3} \Rightarrow A_1E = \frac{1}{3}EA \Rightarrow EA_1 = 1;\, \angle EA_1G = \angle AML \Rightarrow$

$$A_1G = EA_1 \cos\angle OML = 1.\cos\angle OML = \frac{OM}{LM} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Оценката се получава по формулата:

Оценка $= 2 + 0{,}2.K$, *където K е сумата от получените точки.*

math-bg.com