ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧА 1: а) ДМ: $\left\{\frac{2x-1}{y+2}\ge 0,\ \frac{y+2}{2x-1}\ge 0,\quad y+2\ne 0,\ 2x-1\ne 0\right\}$.

В първото уравнение полагаме $\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}=u$, $u>0$ и получаваме $u+\frac{1}{u}=2,$ т. е.

$(u-1)^2=0\Rightarrow u=1$. Тогава $\sqrt{\frac{2x-1}{y+2}}=1$ и получаваме системата $\left|\begin{array}{l}\frac{2x-1}{y+2}=1\\ x+y=9\end{array}\right.\Rightarrow\left|\begin{array}{l}2x-y=3\\ x+y=9\end{array}\right.$.

Решението е $\left|\begin{array}{l}x=4\\ y=5\end{array}\right.\in$ ДМ.

б) ДМ: $\left\{\frac{2x-4}{x+2}>0,\ x+2\ne 0\right\}\Rightarrow x\in(-\infty,\ -2)\cup(2,\ \infty)$. Записваме уравнението във вида

$\log_{\frac{1}{4}}\frac{2x-4}{x+2}=\log_{\frac{1}{4}}1\Rightarrow\frac{2x-4}{x+2}=1\Rightarrow 2x-4=x+2\Rightarrow x=6\in$ ДМ.

ЗАДАЧА 2: ДМ на $f(x)$ е R.

а) За уравнението получаваме $\cos x-\sin x-1+1=\sin 2x+\cos x\Leftrightarrow$

$\sin 2x+\sin x=0\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+\sin x=0\ \Leftrightarrow\sin x(2\cos x+1)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\sin x=0\\ 2\cos x+1=0\end{array}\right.$.

Решенията на $\sin x=0$ са $x=k\pi,\ k\in Z$.

Решенията на $\cos x=-\frac{1}{2}$ са $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2l\pi,\ l\in Z$.

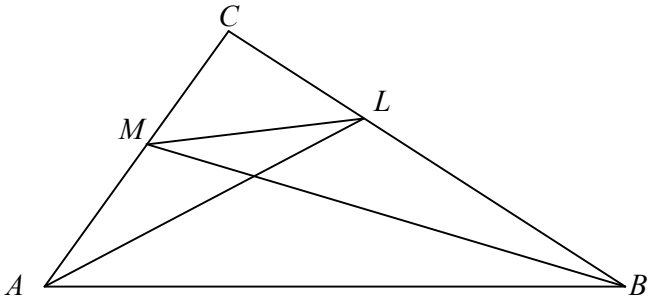
б) $f(x)=\cos x-\sin x-1\Leftrightarrow f(x)=\sqrt{2}\sin(45^\circ-x)-1$.

Но $-1\le\sin(45^\circ-x)\le 1$. Тогава $-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin(45^\circ-x)\le\sqrt{2}$.

Следователно $-\sqrt{2}-1\le\sqrt{2}\sin(45^\circ-x)-1\le\sqrt{2}-1$.

НГС на $f(x)$ е $\sqrt{2}-1$ и НМС на $f(x)$ е $-\sqrt{2}-1$.

ЗАДАЧА 3: а) Нека $BL=x$. Тогава $BC=x+1$. От AL - ъглополовяща $\Rightarrow\frac{CL}{BL}=\frac{AC}{AB}$, т.е. $\frac{1}{x}=\frac{2}{AB}$ и $AB=2x$. От BM – ъглополовяща



$\Rightarrow\frac{AM}{MC}=\frac{AB}{BC}$, т.е. $\frac{\frac{8}{7}}{\frac{6}{7}}=\frac{2x}{x+1}$ и тогава

$4x+4=6x\Rightarrow x=2$. Страните на ΔABC са $AB=4,\ BC=3,\ AC=2$ и $P_{ABC}=9$.

б) От ΔABC по косинусова теорема

$\Rightarrow AB^2=AC^2+BC^2-2.AC.BC.\cos\angle C$, т.е. $4^2=2^2+3^2-2.2.3.\cos\angle C\Rightarrow\cos\angle C=-\frac{1}{4}$. От

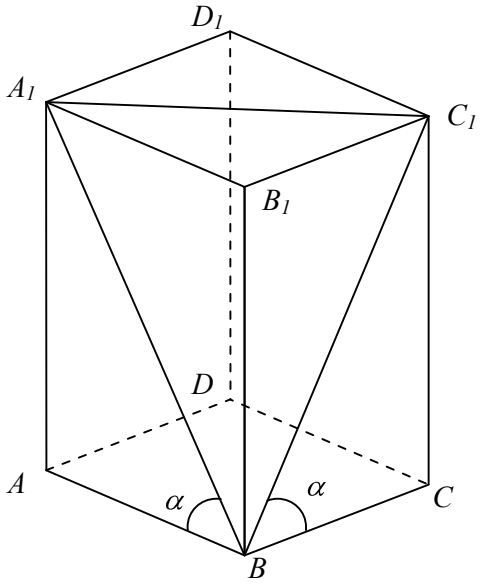
$\cos^2\angle C+\sin^2\angle C=1$ получаваме $\sin\angle C=\frac{\sqrt{15}}{4}$ $\left(\angle C\in(0;\pi)\right)$.

По косинусова теорема за ΔMLC намираме $ML^2=MC^2+LC^2-2.MC.LC.\cos\angle C$, т.е.

$ML^2=\frac{36}{49}+1-2.\frac{6}{7}.1.\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{106}{49}\Rightarrow ML=\frac{\sqrt{106}}{7}$.

По синусова теорема за ΔMLC имаме $\dfrac{ML}{\sin\angle C}=2R$, т.е. $R=\dfrac{\frac{\sqrt{106}}{7}}{2\frac{\sqrt{15}}{4}}=\dfrac{2\sqrt{1590}}{105}$.

ЗАДАЧА 4: а) Ортогоналните проекции на точките A_1 и C_1 върху основата $ABCD$ са A и C.



Тогава $\angle A_1BA=\angle C_1BC=\alpha$. От правоъгълния ΔABA_1 намираме $\dfrac{AB}{A_1B}=\cos\alpha$, т.е. $A_1B=\dfrac{a}{\cos\alpha}=BC_1$.

A_1C_1 е диагонал в квадрата $A_1B_1C_1D_1 \Rightarrow A_1C_1=a\sqrt{2}$.

По косинусова теорема за ΔA_1BC_1 имаме

$A_1C_1{}^2=BA_1{}^2+BC_1{}^2-2BA_1.BC_1.\cos\angle A_1BC_1$,

т.е. $2a^2=\dfrac{a^2}{\cos^2\alpha}+\dfrac{a^2}{\cos^2\alpha}-2.\dfrac{a}{\cos\alpha}.\dfrac{a}{\cos\alpha}\cos\angle A_1BC_1 \Rightarrow$

$\cos\angle A_1BC_1=\sin^2\alpha$.

б) Разстоянието от точка B_1 до равнината (A_1BC_1) е равно на дължината h_{B_1} на височината от B_1 към основата A_1BC_1 на пирамидата $A_1BC_1B_1$.

От правоъгълния ΔBCC_1 намираме

$\dfrac{CC_1}{BC}=\mathrm{tg}\alpha \Rightarrow CC_1=BB_1=a\mathrm{tg}\alpha$.

Обемът $V_{A_1BC_1B_1}=\dfrac{1}{3}S_{A_1BB_1}.B_1C_1=\dfrac{1}{3}.\dfrac{A_1B_1.BB_1}{2}.B_1C_1=\dfrac{1}{3}.\dfrac{a.a\mathrm{tg}\alpha}{2}.a=\dfrac{a^3\mathrm{tg}\alpha}{6}$.

Лицето $S_{A_1BC_1}=\dfrac{A_1B.C_1B}{2}.\sin\angle A_1BC_1=\dfrac{\frac{a}{\cos\alpha}.\frac{a}{\cos\alpha}}{2}.\sqrt{1-\left(\sin^2\alpha\right)^2}=$

$\dfrac{a^2\sqrt{\left(1-\sin^2\alpha\right)\left(1+\sin^2\alpha\right)}}{2\cos^2\alpha}=\dfrac{a^2\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}$.

Тъй като $V_{A_1BC_1B_1}=\dfrac{1}{3}S_{A_1BC_1}.h_{B_1}$, то $h_{B_1}=\dfrac{3V_{A_1BC_1B_1}}{S_{A_1BC_1}}=\dfrac{3\frac{a^3\mathrm{tg}\alpha}{6}}{\frac{a^2\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{2\cos\alpha}}=\dfrac{a\sin\alpha}{\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$.