ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ "ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ" – СОФИЯ

КРИТЕРИИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ
ОТ КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
28.04.2007 г.

ЗАДАЧА 1: Да се решат уравненията:

а) $2.25^x - 7.10^x + 5.4^x = 0$;

б) $\log_x\left(\sqrt{x+1}+2\right) + \log_{\frac{1}{x}}(x+1) = 0$.

Решение: а) (2 точки) $2.25^x - 7.10^x + 5.4^x = 0 \ /:4^x \neq 0 \Rightarrow 2.\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 7\left(\frac{5}{2}\right)^x + 5 = 0.$

Полагаме $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x; t > 0 \Rightarrow 2t^2 - 7t + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 > 0 \\ t_2 = \frac{5}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^x = 1 \\ \left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}.$

б) (3 точки) DM $\begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ \sqrt{x+1} + 2 > 0, x+1 \geq 0 \\ \frac{1}{x} > 0, \frac{1}{x} \neq 1, x \neq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$. Следователно DM $x \in (0;1) \cup (1;\infty)$.

Уравнението е еквивалентно с

$$\log_x \frac{\sqrt{x+1}+2}{x+1} = \log_x 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} = x-1 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = (x-1)^2 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 3x = 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \notin DM \\ x_2 = 3 \in DM \end{matrix}.$$

ЗАДАЧА 2: Дадена е функцията $f(x) = x^3 + bx^2 - 7x + a - 4$, където *a* и *b* са реални параметри.

а) Ако *b*=5, да се намерят координатите на точките, в които допирателната към графиката на функцията *f(x)* сключва с положителната посока на оста Ox ъгъл с големина 45°**;**

б) Ако *b*=2, да се намерят стойностите на реалния параметър *a*, при които графиката на функцията *f(x)* пресича оста Ox само един път.

Решение: а) (2 точки) Нека търсената точка е $M(x_0;\ y_0)$.

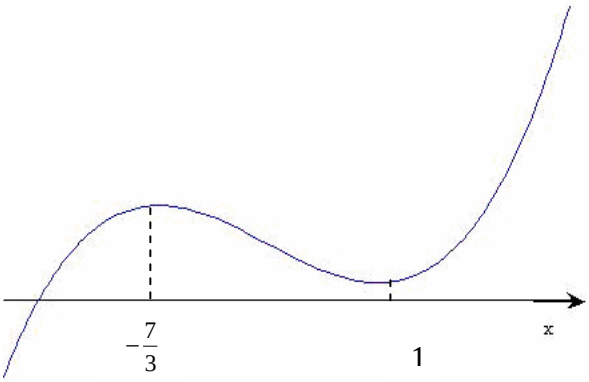
От $f'(x) = 3x^2 + 10x - 7 \Rightarrow f'(x_0) = tg45° = 1 \Rightarrow 3x_0^2 + 10x_0 - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_0' = -4 \\ x_0'' = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0' = 40 + a \\ y_0'' = -\frac{166}{27} + a \end{cases}.$

б) (3 точки) От $f(x) = x^3 + 2x^2 - 7x + a - 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 4x - 7 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{7}{3} \end{cases}.$

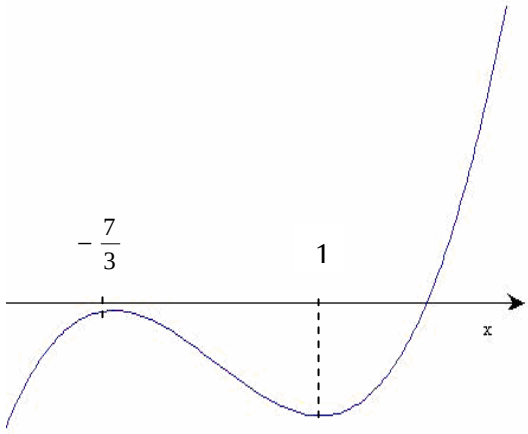
math-bg.com

Тогава $\begin{cases} f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{7}{3}\right] \cup [1; \infty) \\ f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{7}{3}; 1\right] \end{cases} \Rightarrow f_{\min} = f(1) = a - 8,\ f_{\max} = f\left(-\frac{7}{3}\right) = a + \frac{284}{27}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty,\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Тъй като функцията има два локални екстремума, то за да пресича графиката й оста Ox само един път, трябва



или



Тогава $f\left(-\frac{7}{3}\right) < 0 \cup f(1) > 0 \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{284}{27}\right) \cup (8; \infty)$.

ЗАДАЧА 3: Голямата основа AB на равнобедрен трапец ABCD има дължина 15 см. Точка K е среда на отсечката AB. Отсечката CK пресича диагонала BD в точка N, а отсечката DK пресича диагонала AC в точка M. Дължината на MN е 3 см. Да се намерят:

а) дължината на основата CD на трапеца ABCD;

б) дължината на бедрото на трапеца ABCD, ако в трапеците ABNM и MNCD могат да се впишат окръжности.

Решение: а) (3 точки) От $\Delta AKD \cong \Delta BKC$ $(AK = BK,\ AD = BC,\ \angle KAD = \angle KBC)$ следва $KD = KC,\ \angle AKD = \angle BKC$ (1).

От $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ $(AB = BA,\ AD = BC,\ \angle BAD = \angle ABC)$ следва $\angle BAC = \angle ABD$ (2).

От $\Delta AKM \cong \Delta BKN$ $(AK = BK, \angle KAM = \angle KBN, \angle AKM = \angle BKN)$ следва $KM = KN$.

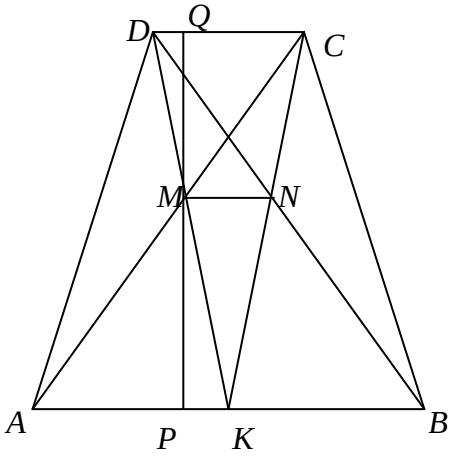
От $\frac{KM}{KD} = \frac{KN}{KC}$ по теоремата на Талес следва, че $MN \,||\, DC \,||\, AB$.

От $\Delta DCK \sim \Delta MNK \Rightarrow \frac{DC}{MN} = \frac{CK}{NK} = \frac{CN + NK}{NK} = 1 + \frac{CN}{NK}$ (3).

От $\Delta DCN \sim \Delta BKN$ $(\angle DCN = \angle BKN,\ \angle CDN = \angle KBN) \Rightarrow \frac{CN}{KN} = \frac{DC}{BK} = \frac{DC}{7{,}5}$ (4).

Заместваме (4) в (3) и получаваме $\frac{DC}{3} = 1 + \frac{DC}{7{,}5} \Rightarrow DC = 5$.

math-bg.



б) (2 точки) Нека в трапеца $ABNM$ може да се впише окръжност. Тогава
$AM + BN = AB + MN \Rightarrow AM = BN = 9$.
Построяваме $MP \perp AB$ $(P \in AB)$. Следователно
$AP = \dfrac{AB - MN}{2} = 6$. По Питагорова теорема за
ΔAPM намираме $MP = \sqrt{AM^2 - AP^2} = 3\sqrt{5}$.
От ΔMKP по Питагорова теорема следва

$$MK = \sqrt{MP^2 + PK^2} = \sqrt{MP^2 + (AK - AP)^2} = \frac{3\sqrt{21}}{2}.$$

От $\Delta MKA \sim \Delta MDC \Rightarrow \dfrac{MK}{MD} = \dfrac{KA}{DC} \Rightarrow MD = \sqrt{21}$.

За трапеца $MNCD$ получаваме $MD + NC = 2\sqrt{21} \neq 8 = MN + CD$. Следователно, в него не може да се впише окръжност.

Аналогично, ако в трапеца $MNCD$ може да се впише окръжност, то
$DM + CN = DC + MN \Rightarrow DM = CN = 4$.

Построяваме $MQ \perp DC$ $(Q \in DC)$. Следователно $DQ = \dfrac{DC - MN}{2} = 1$.

По Питагорова теорема за ΔDQM намираме $MQ = \sqrt{DM^2 - DQ^2} = \sqrt{15}$.

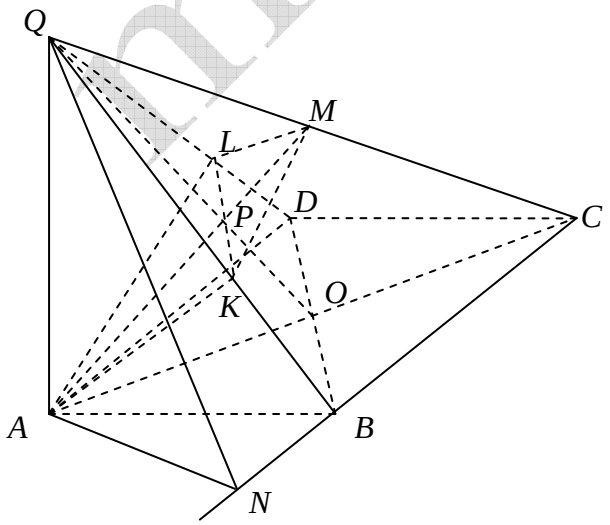
От ΔCQM по Питагорова теорема следва

$$CM = \sqrt{CQ^2 + QM^2} = \sqrt{MQ^2 + (CD - DQ)^2} = \sqrt{31}.$$

От $\Delta MKA \sim \Delta MDC \Rightarrow \dfrac{MA}{MC} = \dfrac{KA}{DC} \Rightarrow MA = \dfrac{3\sqrt{31}}{2}$.

За трапеца $ABNM$ получаваме $AM + BN = 3\sqrt{31} \neq 18 = MN + AB$. Следователно, в него не може да се впише окръжност.

И така, не може и в двата трапеца $MNCD$ и $ABNM$ едновременно да бъдат вписани окръжности.



ЗАДАЧА 4: Основата на пирамида ABCDQ е ромб ABCD с ъгъл при върха A с големина 60º и дължина на диагонала AC=18 см. Околният ръб AQ е перпендикулярен на основата и има дължина $6\sqrt{7}$ см. Да се намерят:

а) околната повърхнина на пирамидата;

б) лицето на сечението на пирамидата с равнина, минаваща през върха A, през средата M на ръба CQ и успоредна на диагонала на основата BD.

math-bg.com

Решение: а) (2 точки). От правоъгълния ΔABO (точка O – пресечна точка на диагоналите, $AO \perp BO,\ AO = 9,\ \angle OAB = 30°) \Rightarrow AB = 6\sqrt{3}.$

$\Delta ABQ \cong \Delta ADQ \Rightarrow S_{ABQ} = S_{ADQ} = 18\sqrt{21}$.

Построяваме $AN \perp BC\ (N \in BC)$. Тъй като $\angle ABC = 120°$, то точка N е външна за отсечката BC. Ортогоналната проекция на QN върху равнината на основата е AN, следователно по теоремата за трите перпендикуляра $QN \perp BC$.

От ΔANB - (правоъгълен и $\angle ABN = 60^{\circ} \Rightarrow \dfrac{AN}{AB} = \sin 60°) \Rightarrow AN = 9$.

От ΔANQ (правоъгълен) имаме $NQ^2 = AN^2 + AQ^2 = 333 \Rightarrow NQ = 3\sqrt{37}$ см.

Тъй като $\Delta BCQ \cong \Delta DCQ \Rightarrow S_{BCQ} = S_{DCQ} = 9\sqrt{111}$.

Тогава $S_{околна} = 2S_{\Delta ABQ} + 2S_{\Delta BCQ} = 18\sqrt{3}\left(2\sqrt{7} + \sqrt{37}\right)$.

б) (3 точки) Равнината на сечението пресича (ACQ) в правата AM. Нека AM пресича QO в точка P. Следователно, точка P е от сечението. В равнината BDQ построяваме права KL ($K \in BQ,\ L \in DQ$), минаваща през точка P и успоредна на BD. Тогава сечението е AKML. Той има взаимно перпендикулярни диагонали, защото $KL \parallel BD,\ AM \perp BD$ (ортогоналната проекция на AM е AC и $AC \perp BD$).

От ΔACQ (правоъгълен) $\Rightarrow CQ = \sqrt{\left(6\sqrt{7}\right)^2 + 18^2} = 24$ см. и $AM = \dfrac{1}{2}CQ = 12$ см.

Точка P е пресечна точка на медианите в $\Delta ACQ \Rightarrow \dfrac{QP}{QO} = \dfrac{2}{3}$.

От $\Delta KLQ \sim \Delta BDQ \Rightarrow \dfrac{KL}{BD} = \dfrac{QP}{QO} = \dfrac{2}{3}$ Тогава $KL = \dfrac{2}{3}BD = \dfrac{2}{3}AB = 4\sqrt{3} \Rightarrow$.

$S_{сечението} = \dfrac{1}{2}AM.KL = 24\sqrt{3}$ см^2.

Оценката се образува по формулата $Оценка = 2 + 0{,}2.K$, *където K е броят на получените точки. Ако K<5, оценката е Слаб 2.*

math-bg.com