ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ "ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ" – СОФИЯ

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
25. 07. 2007 г.

ПЪРВИ ВАРИАНТ

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧА 1: а) От $y^{x^2-7x+12} = y^0 \Rightarrow x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 4.$

От $\left| \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y^2 = 6 \end{array} \right.$ и $\left| \begin{array}{l} x_2 = 4 \\ y^2 = 5 \end{array} \right.$ при $y > 1$ получаваме, че решенията са $\left| \begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = \sqrt{6} \end{array} \right.$ и $\left| \begin{array}{l} x_2 = 4 \\ y_2 = \sqrt{5} \end{array} \right.$.

б) ДМ = $\left\{5 - x \geq 0;\ \ \sqrt{5-x} \neq 0;\ \ \ 4 - 3x \geq 0\right\} \Rightarrow x \in \left(-\infty; \frac{4}{3}\right].$

След повдигане на двете страни на даденото уравнение на квадрат и освобождаване от знаменател получаваме уравнението $2x^2 - 3x - 44 = 0$, чиито корени са $x_1 = \frac{11}{2} \notin$ ДМ и $x_2 = -4 \in$ ДМ.

ЗАДАЧА 2: а) Преобразуваме даденото уравнение по следния начин:

$5 - 4(1 - \cos^2 x) - 4(1 + \cos x) = 0 \Rightarrow 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0$. Полагаме $\cos x = u,\ u \in [-1;1]$ и получаваме $4u^2 - 4u - 3 = 0$, откъдето намираме $u_1 = \frac{3}{2} \notin [-1;\,1]$ и $u_2 = -\frac{1}{2} \in [-1;\,1] \Rightarrow$ $\cos x = -\frac{1}{2}$, т.е. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$.

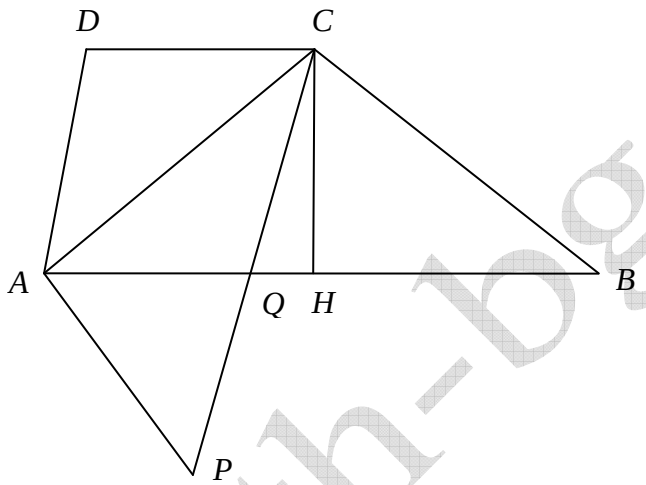
б) С преобразуванията в а) получаваме уравнението $4\cos^2 x - 4\cos x - 3(m+1) = 0.$ Полагаме $\cos x = u,\ u \in [-1;\,1]$ и получаваме уравнението $4u^2 - 4u - 3(m+1) = 0$. Даденото тригонометрично уравнение има решение тогава и само тогава, когато квадратното уравнение има решение в интервала $[-1;\,1]$. Това е изпълнено, когато уравнението има два различни или един двоен корен в интервала $[-1;\,1]$ или точно един от корените е в $[-1;\,1]$, т.е. в сила е

(1) $\left| \begin{array}{l} D \geq 0 \\ 4f(-1) \geq 0 \\ 4f(1) \geq 0 \end{array} \right.$ или (2) $f(-1)f(1) \leq 0$.

math-bg.com

Пресмятаме $f(-1)=5-3m,\ f(1)=-3m-3,\ D=4(3m+4)$. Тогава системата (1) добива вида $\left|\begin{array}{l}4(3m+4)\ge 0\\ 5-3m\ge 0\\ -3m-3\ge 0\end{array}\right.$ и нейното решение е $m\in\left[-\frac{4}{3};\ -1\right]$. Неравенството (2) добива вида $-3(5-3m)(m+1)\le 0$ и решенията му са $m\in\left[-1;\ \frac{5}{3}\right]$. Следователно, уравнението има решение при $m\in\left[-\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right]$. Целите числа от този интервал са -1, 0 и 1.

ЗАДАЧА 3: а) От $\angle APC=\angle PAB\Rightarrow AQ=PQ$. Но $PQ=CQ$ $\Rightarrow$ точка Q е център на описаната около ΔAPC окръжност $\Rightarrow \angle CAP=90^0$.



б) От правоъгълния ΔCAP по Питагорова теорема $\Rightarrow PC=10$ см $\Rightarrow$ $AQ=PQ=QC=5$ см. Но $QC\parallel AD$ и $AQ\parallel DC\Rightarrow AQCD$ е ромб.

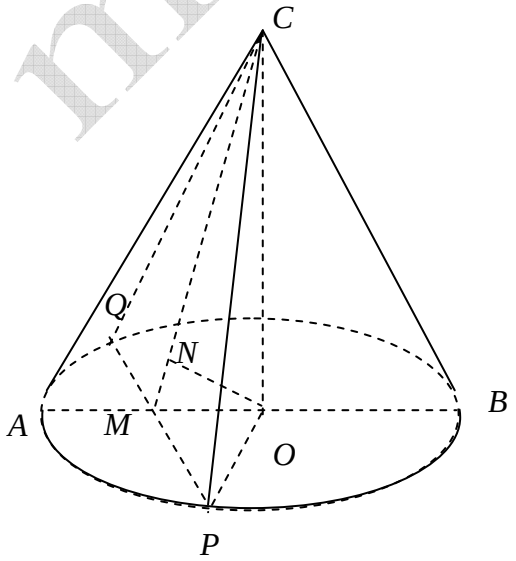
Пресмятаме $S_{AQC}=S_{ACD}=12$ см^2.

Но $S_{AQC}=\frac{1}{2}AQ.CH\Rightarrow CH=\frac{24}{5}$ см.

По косинусова теорема за $\Delta ACQ\Rightarrow$ $\cos\angle AQC=-\frac{7}{25}\Rightarrow\cos\angle BQC=\frac{7}{25}$.

От правоъгълния $\Delta QHC\Rightarrow QH=\frac{7}{5}\Rightarrow$ $AH=\frac{32}{5}$ и $QB=\frac{39}{5}$ см. Тогава $S_{QBC}=\frac{468}{25}$ $\Rightarrow$ $S_{ABCD}=2S_{AQC}+S_{QBC}=\frac{1068}{25}=42{,}72$ см^2.

<u>Забележка:</u> От условията на задачата следва, че голямата основа на трапеца $ABCD$ е AB и ъглите при нея са остри.



ЗАДАЧА 4: а) Нека ΔPQC е сечението на дадената равнина с конуса, като P и Q лежат върху окръжността на основата. Разглеждаме осното сечение ABC на конуса, перпендикулярно на хордата PQ. Тъй като ΔPQC е равнобедрен с височина MC към основата PQ, то от теоремата за трите перпендикуляра следва, че $MO\perp PQ\Rightarrow$ $\angle CMO=\alpha$. Но равнината $MOC\perp PQC\Rightarrow$ разстоянието от точка O до равнината PQC е дължината на височината ON в ΔMOC. От условието, че дъгата $PAQ=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow$ $\angle POM=\frac{\pi}{3}$

math-bg.com

и $MO = \frac{r}{2}$, където r е радиусът на основата на конуса. От правоъгълния $\Delta MON \Rightarrow NO = MO \sin\alpha \Rightarrow r = \frac{4}{\sin\alpha}$. От правоъгълния ΔMOC $\frac{CO}{MO} = tg\alpha \Rightarrow CO = \frac{2}{\cos\alpha}$.

Тогава $V_{\text{конус}} = \frac{1}{3}\pi r^2 CO = \frac{32\pi}{3}\frac{1}{(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha}$. Обемът на конуса е най-малък, когато знаменателят е най-голям. Полагаме $u = \cos\alpha$, $u \in (0;1)$ и разглеждаме функцията $f(u) = (1-u^2)u$. Намираме НГС на $f(u)$ при $u \in (0;1)$. Тъй като $f'(u) = 1-3u^2$, то $f'(u) = 0 \Leftrightarrow u_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$. По метода на интервалите определяме, че НГС на $f(u)$ се достига при $u = \frac{\sqrt{3}}{3}$, т.е. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Следователно, най-малката стойност е $V_{\text{конус}} = 16\sqrt{3}\pi$ см^3.

б) От tg $\alpha = \sqrt{2}$ следва $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Тогава $r = 2\sqrt{6}$, $OC = 2\sqrt{3} \Rightarrow AC = 6$. Радиусът R на описаната сфера е равен на радиуса на описаната около ΔABC окръжност. Тъй като $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.OC = \frac{AB.AC.BC}{4R}$, то $R = 3\sqrt{3}$. Тогава $\frac{S_{сфера}}{S_{конус}} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$.

math-bg.com