ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ "ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ" – СОФИЯ

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
26.07.2006 г.

ПЪРВИ ВАРИАНТ

КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ И РЕШЕНИЯ

ЗАДАЧА 1: а) Да се реши уравнението $\log_x 3 - \log_{\frac{1}{3}} x = 2$ **(2,5 точки)**;

б) Да се реши неравенството $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}} \le 1$ **(2,5 точки)**.

РЕШЕНИЕ: а) ДМ: $x>0,\ x\ne 1; \log_x 3 + \log_3 x = 2 \Rightarrow \dfrac{1}{\log_3 x} + \log_3 x = 2$. Полагаме $\log_3 x = t$, $t \ne 0 \Rightarrow \dfrac{1}{t} + t = 2 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow (t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = 1$, откъдето $\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3 \in$ ДМ.

б) ДМ: $x^2 - 3x + 2 \ne 0$, $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2} \ge 0$. Тъй като $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$, $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$, то ДМ: $x \ne 1;\ 2$ и $\dfrac{x-3}{x-2} \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty;1) \cup (1;2) \cup [3;\infty)$.

От $\sqrt{\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-3x+2}} \le 1$ след повдигане на квадрат получаваме $\dfrac{x-3}{x-2} \le 1 \Rightarrow$ $\dfrac{-1}{x-2} \le 0 \Rightarrow x - 2 > 0$, т.е. $x>2$. Предвид ДМ получаваме, че $x \in [3;\infty)$.

ЗАДАЧА 2: а) Да се реши уравнението $(\sin 2x - \cos x)\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = 0$ **(3 точки)**;

б) Да се намерят най-голямата и най-малката стойности на функцията $f(x) = x^3 - 3x + 3$ в интервала $[-2;2]$ **(2 точки)**.

РЕШЕНИЕ: а) ДМ: $\pi^2 - 4x^2 \ge 0 \Rightarrow (\pi - 2x)(\pi + 2x) \ge 0 \Rightarrow x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

От $(\sin 2x - \cos x)\sqrt{\pi^2 - 4x^2} = 0 \Rightarrow \pi^2 - 4x^2 = 0$, т. е. $x = -\dfrac{\pi}{2}$ или $x = \dfrac{\pi}{2}$, или $\sin 2x - \cos x = 0$, т. е. $2\sin x \cos x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0$, $x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ или $\sin x = \dfrac{1}{2}$, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2l\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2l\pi$.

В ДМ решенията са $-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{6}$.

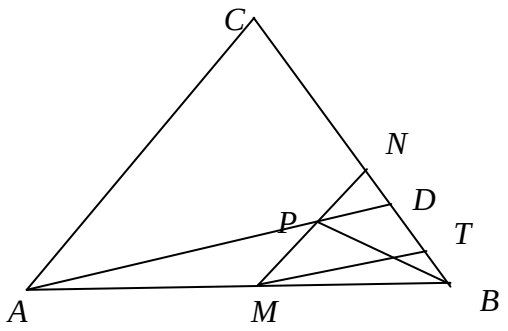
math-bg.com

б) $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1);\ f'(x)=0\ \Rightarrow x=\pm 1\in[-2;2]$. Пресмятаме $f(-1)=5,\ f(1)=1,\ f(-2)=1,\ f(2)=5.$ Тогава НГС = 5 и НМС = 1.

ЗАДАЧА 3: В равностранен ΔABC е построена средната отсечка $MN\ (M\in AB,\ N\in BC)$. Точка P е среда на отсечката MN и правата AP пресича BC в точка D. Да се намерят:

а) косинусът на $\angle APB$ (**3 точки**);

б) отношението на лицата на ΔABD и ΔACD (**2 точки**).



РЕШЕНИЕ: а) Означаваме $AB=a$. Тогава $AM=BM=MN=\frac{a}{2},\ MP=\frac{a}{4},\quad PB=\frac{a\sqrt{3}}{4}$ – височи-на в равностранния ΔBMN. Тъй като $MN\|AC$ $\Rightarrow \angle NMB=60^0,\ \angle AMP=180^0-60^0=120^0$.

По косинусова теорема за ΔAMP намираме $AP^2=AM^2+MP^2-2AM.MP.\cos\angle AMP$, т.е.

$$AP^2=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{16}-2.\frac{a}{2}.\frac{a}{4}\cos 120^0=\frac{7a^2}{16}\Rightarrow AP=\frac{a\sqrt{7}}{4}.$$

По косинусова теорема за ΔABP намираме

$$AB^2=AP^2+BP^2-2AP.BP.\cos\angle APB\Rightarrow a^2=\frac{7a^2}{16}+\frac{3a^2}{16}-2.\frac{a\sqrt{7}}{4}.\frac{a\sqrt{3}}{4}\cos\angle APB.$$

Следователно, $\cos\angle APB=-\frac{\sqrt{21}}{7}$.

б) Построяваме права $MT\|AD\ (T\in BC)\Rightarrow MT$ е средна отсечка в ΔABD. Тогава $BT=TD$ (1)

В ΔMTN PD е средна отсечка ($PD\|MT$ и точка P е среда на MN) $\Rightarrow TD=DN$ (2). От (1) и (2) получаваме $BT=TD=DN=\frac{1}{3}BN=\frac{1}{6}a$, а $BD=2BT=\frac{1}{3}a$ и $CD=BC-BD=\frac{2}{3}a$.

Тогава $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\frac{1}{2}BD.h_A}{\frac{1}{2}CD.h_A}=\frac{BD}{CD}=\frac{\frac{1}{3}a}{\frac{2}{3}a}=\frac{1}{2}$.

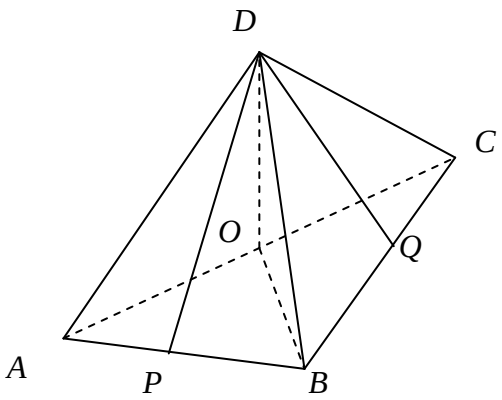
math-bg.com

ЗАДАЧА 4: Околните ръбове на пирамидата $ABCD$ с връх D имат дължини $5\sqrt{2}$ и околната стена ACD е перпендикулярна на основата ABC. Дължините на радиусите на вписаната в и описаната около основата окръжности са съответно 2 и 5. Да се намерят:

а) обемът на пирамидата (**3 точки**);

б) дължината на радиуса на вписаната в пирамидата сфера (**2 точки**).

РЕШЕНИЕ: а) Нека точка O е ортогоналната проекция на върха D върху равнината на основата ABC. От $(ACD)\perp(ABC)$ следва O лежи върху AC. От $AD = BD = CD$ следва $AO=BO=CO$. Следователно, O е център на описаната около ΔABC окръжност и ΔABC е правоъгълен с хипотенуза AC. От метрични зависимости в правоъгълен триъгълник следват равенствата $AB^2 + BC^2 = AC^2 = 100$ и $\frac{AB + BC - 10}{2} = 2$, от които получаваме



$AB.AC = 48 \Rightarrow S_{ABC} = 24$. Тъй като $DO^2 + OA^2 = AD^2 \Rightarrow DO = 5$.

Тогава $V = \frac{1}{3} S_{ABC}.DO = \frac{1}{3}.24.5 = 40$.

б) От формулата $3V = S_1.r_{\text{вп. сф.}}$, където $S_1 = S_{\text{пълна пов.}}$, следва $r_{\text{вп.сф.}} = \frac{3V}{S_1}$. Но

$$S_1 = S_{ABC} + S_{ADC} + S_{DBC} + S_{ABD} = \frac{6.8}{2} + \frac{10.5}{2} + \frac{8.\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 4^2}}{2} + \frac{6\sqrt{\left(5\sqrt{2}\right)^2 - 3^2}}{2} =$$

$49 + 4\sqrt{34} + 3\sqrt{41}$.

Следователно, $r_{\text{вп.сф.}} = \frac{120}{49 + 4\sqrt{34} + 3\sqrt{41}}$.

Оценката се получава по формулата:

Оценка = 2+0,2*K*,

където *K* е броят на получените точки.

math-bg.com