ВИСШЕ СТРОИТЕЛНО УЧИЛИЩЕ „ЛЮБЕН КАРАВЕЛОВ" - СОФИЯ

РЕШЕНИЯ

на задачите от конкурсния изпит по Математика, проведен на 20.07.2005 г.

Задача 1.

а) **(2,5 точки)** ДМ: $\left|\begin{array}{l} -x>0 \\ \log_2(-x)\ge 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x<0 \\ -x\ge 2^0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} x<0 \\ x\le -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1]$.

$5\log_2(-x)=\left(\log_2(-x)\right)^2 \Leftrightarrow \left[5-\log_2(-x)\right]\log_2(-x)=0$.

Тогава, $\log_2(-x)=0$, т.е. $x=-1\in$ ДМ или $\log_2(-x)=5$, т.е. $x=-32\in$ ДМ.

б) **(2,5 точки)** $x_1+x_2=\dfrac{4m}{3-m}$; $x_1x_2=\dfrac{-5m}{3-m}$.

Тъй като в условието на задачата не се иска корените на уравнението да са реални, не е необходимо да се разглежда $D\ge 0$.

Лявата страна на неравенството има смисъл при $x_1\ne 0$ и $x_2\ne 0$, т.е. при $m\ne 0$.

$$\frac{2}{x_1}+\frac{2}{x_2}+x_1+x_2\ge 0 \Leftrightarrow \frac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}+x_1+x_2\ge 0 \Rightarrow \frac{8m}{-5m}+\frac{4m}{3-m}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{7m-6}{5(3-m)}\ge 0 \Leftrightarrow m\in\left[\frac{6}{7};3\right).$$

Като вземем предвид, че $m\ne 0$ и $m\in\left[\frac{6}{7};3\right)$, получаваме $m\in\left[\frac{6}{7};3\right)$.

Задача 2.

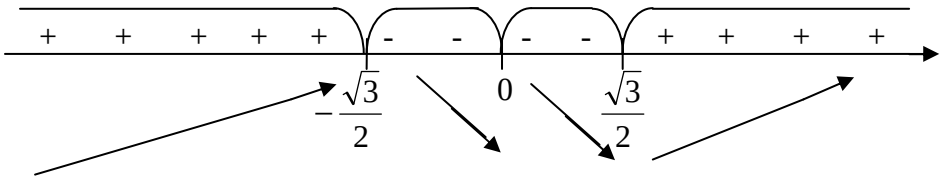
а) **(2 точки)** $f(1)=1-\dfrac{1}{\sin\alpha}+\cos^2\alpha \Rightarrow$ уравнението е $1-\dfrac{1}{\sin\alpha}+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0 \Leftrightarrow$

$$2-\frac{1}{\sin\alpha}=0 \Leftrightarrow \sin\alpha=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi \\ \alpha=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \end{cases},\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

б) **(3 точки)**

При $\alpha=\dfrac{\pi}{6} \Rightarrow f(x)=x^2-2x+\dfrac{3}{4} \Rightarrow g(x)=\dfrac{x^2-2x+\frac{3}{4}}{x}$. ДМ за $g(x)$: $x\ne 0$.

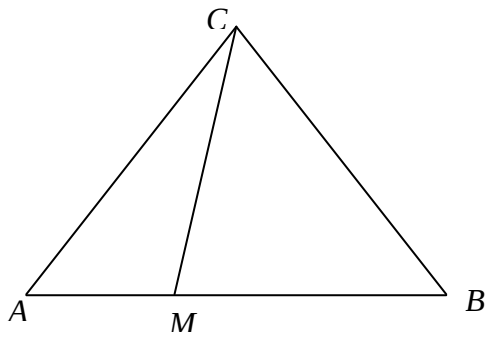
$g'(x)=\dfrac{(2x-2)x-x^2+2x-\frac{3}{4}}{x^2}=\dfrac{4x^2-3}{4x^2}$. Тогава $g'(x)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ x_2=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$ (критични точки).



math-bg.com

Следователно, $g(x)$ е строго растяща при $x \in \left(-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; +\infty\right)$ и $g(x)$ е строго намаляваща при $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $g_{max} = g\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3} - 2$ и $g_{min} = g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \sqrt{3} - 2$.

Задача 3.



а) **(4 точки)** Означаваме $\angle MCA = \gamma \Rightarrow \angle MCB = 2\gamma;\ \angle ACB = 3\gamma,\ \gamma \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Тогава $\angle MAC = 90^0 - \frac{3\gamma}{2};\ \angle AMC = 90^0 + \frac{\gamma}{2}$. По синусова теорема за $\Delta AMC \Rightarrow$

$$\frac{AC}{\sin\left(90^0 + \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{MC}{\sin\left(90^0 - \frac{3\gamma}{2}\right)} \Rightarrow \frac{a}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{2\cos\frac{3\gamma}{2}} \Rightarrow \cos\frac{\gamma}{2} = 2\cos\frac{3\gamma}{2} \Rightarrow$$

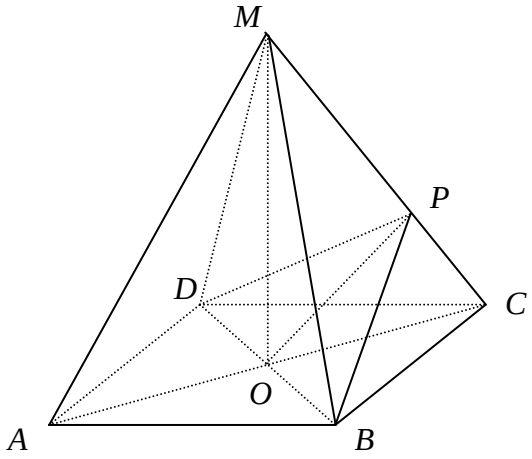
$$\cos\frac{\gamma}{2} = 2\left(4\cos^3\frac{\gamma}{2} - 3\cos\frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow 8\cos^3\frac{\gamma}{2} - 7\cos\frac{\gamma}{2} = 0.$$

Тъй като при $\cos\frac{\gamma}{2} \neq 0$ при $\frac{\gamma}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{7}{8} \Rightarrow \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\sqrt{14}}{4} \Rightarrow$

$\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1 = \frac{3}{4}$, откъдето намираме $\cos 3\gamma = 4\cos^3\gamma - 3\cos\gamma = -\frac{9}{16}$.

б) **(1 точка)** $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BC.\sin 3\gamma = \frac{a^2}{2}\sin 3\gamma = \frac{a^2}{2}\sqrt{1-\cos^2 3\gamma} = \frac{5\sqrt{7}}{32}a^2$.

Задача 4.



а) **(3 точки)**

math-bg.com

Построяваме равнина през DB, перпендикулярна на MC и означаваме прободната й точка с P.

Тогава $\left.\begin{matrix} BP \perp MC \\ DP \perp MC \end{matrix}\right\} \Rightarrow \varphi = \angle(BCM, DCM) = \angle BPD$.

$V = \frac{1}{3}B.h$, където $B = a^2$, $h = OM$. Означаваме $\gamma = \angle OCM$. От $\Delta OPC \Rightarrow \sin\gamma = \frac{OP}{OC} = \frac{OP}{a\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Тъй като ΔBDP е равнобедрен, от $\Delta BOP \Rightarrow \frac{OP}{OB} = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} \Rightarrow OP = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} \Rightarrow$

$\sin\gamma = \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}$; $\cos\gamma = \sqrt{1\text{-}\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}}$, откъдето следва, че $\varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

$$\text{От } \Delta COM \Rightarrow \frac{OM}{OC} = \operatorname{tg}\gamma \Rightarrow OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

$$\text{Следователно, } V = \frac{1}{3}a^3\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1-\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}}} = a^3\frac{\sqrt{2}}{6}\frac{\cos\frac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}}{-\cos\varphi}, \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

б) **(2 точки)** Радиусът R на описаната около пирамидата сфера е равен на радиуса на описаната около ΔACM окръжност. Центърът на описаната сфера е точка Q - пресечна точка на OM и симетралата на AM. По синусова теорема за ΔACM следва, че $2R = \frac{AM}{\sin\gamma}$. Но

$\frac{OA}{AM} = \cos\gamma \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\operatorname{cotg}^2\frac{\varphi}{2}}}$. След заместване и преобразуване получаваме

$$R = -a\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{-\cos\varphi}}{\cos\varphi.\cos\frac{\varphi}{2}}, \varphi \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right).$$

Оценката се формира по формулата:

ОЦЕНКА=2+0,2.*K*,

където *K* е броят на получените точки.

math-bg.com