$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$. Продължавайки по точи начин заключаваме, че 7.2^2 или 7.2 трябва да е сума на три квадрата. Непосредствено се проверява, че това не е изпълнено за $7.2^2 = 28$ и следователно не е изпълнено за 7.2^n при четно n. От друга страна, $7.2 = 14 = 3^2 + 2^2 + 1^2$, което ни подсеща при нечетно $n = 2m + 1$ да изберем $a_1 = 3.2^m, a_2 = 2.2^m, a_3 = 1.2^m$ и тогава $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 14.2^{2m} = 7.2^n$.

Нека $n = 2m$ е четно и $k = 4$. Аналогично на горното, тъй като $7 = 2^2+1^2+1^2+1^2$, избираме $a_1 = 2^{m+1}$, $a_2 = a_3 = a_4 = 2^m$ и получаваме $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2 = 7.2^{2m} = 7.2^n$.

Окончателно, $k = 3$ за нечетно n и $k = 4$ за четно n.

Инструкции за оценяване. 1 т. за случая $k = 2$; **2 т.** за случая $k = 3$, $2 \mid n$; **2 т.** за случая $k = 3$, $2 \nmid n$; **2 т.** за случая $k = 4$, $2 \mid n$. (Не се зачита цитирането без доказателство на факти относно представянето на естествените числа като сума на няколко квадрата.)

Задача 10.1 Да се реши уравнението

$$20^{x^2}.10^x = 2$$

Решение. Записваме уравнението във вида

$$2^{x^2-1}.10^{x^2+x} = 1,$$

което е еквивалентно с уравнението

$$(2^{x-1}.10^x)^{x+1} = 1.$$

Имаме две възможности $x + 1 = 0$ или $2^{x-1}.10^x = 1$. При първата достигаме до решението $x_1 = -1$, а при втората достигаме до уравнението $20^x = 2$, което ни води до решението $x_2 = \log_{20} 2$.

Окончателно получаваме решенията $x_1 = -1$ и $x_2 = \log_{20} 2$.

Инструкции за оценяване: 1 т. за свеждане до уравнението $2^{x^2-1}.10^{x^2+x} = 1$; **1 т.** за свеждане до уравнението $(2^{x-1}.10^x)^{x+1} = 1$; **2 т.** за случая $x+1 = 0$ и достигане до решението $x_1 = -1$; 1 т. за случая $2^{x-1}.10^x = 1$; **1 т.** за достигане до уравнението $20^x = 2$; **1 т.** за достигане до решението $x_2 = \log_{20} 2$;

Задача 10.2. Външновписаната окръжност към страната AB на $\triangle ABC$ се допира до AB в точка D. Ако $\sphericalangle CAB = 2 \sphericalangle CDA$, да се намери стойността на отношението $AD : BD$.

Решение. *(Тригонометричен подход)* Ще използваме стандартните означения за страните на $\triangle ABC$ и нека $\sphericalangle ADC = \varphi$. От синусова теорема за $\triangle ACD$ получаваме $CD = \dfrac{b \sin 2\varphi}{\sin \varphi} = 2b \cos \varphi$. Оттук и от косинусова теорема за $\triangle ADC$ имаме

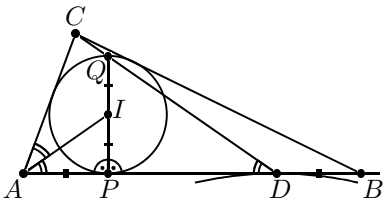
$$4b^2 \cos^2 \varphi = b^2+(p-b)^2-2b(p-b) \cos 2\varphi \iff 2b^2 \cos 2\varphi = -b^2+(p-b)^2-2b(p-b) \cos 2\varphi,$$

откъдето намираме $\cos 2\varphi = \dfrac{p-2b}{2b}$. От косинусова теорема за $\triangle ABC$ получаваме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\frac{(p-2b)}{2b} \iff a^2 = (b+c)^2 - pc \iff a - b = \frac{c}{2}.$$

Остава да пресметнем $BD = p - a = \dfrac{b+c-a}{2} = \dfrac{c}{4}$ и следователно $AD : BD = 3 : 1$.

(Синтетичен подход) Нека вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k е с център I и се допира до страната AB в точка P. Ако означим с Q диаметрално противоположната точка на P в k, то добре известен факт е, че точките C, Q и D са колинеарни. (Класическото доказателство е с хомотетия, с център C, която изпраща k във външновписаната окръжност.)



Тогава $\sphericalangle IAP = \frac{1}{2} \sphericalangle CAB = \sphericalangle CDA$, т.е. правоъгълните триъгълници $\triangle IPA$ и $\triangle QPD$ са подобни и $PD : PA = PQ : PI = 2 : 1$. От друга страна $PA = BD$ и следователно $AD : BD = 3 : 1$.

Инструкции за оценяване: *(Тригонометричен подход)* **1 т.** за въвеждането на помощен ъгъл $\sphericalangle ADC = \varphi$, **1 т.** за прилагане на синусова теорема за $\triangle ADC$ и намиране $CD = 2b\cos\varphi$; **2 т.** за прилагане на косинусова теорема за $\triangle ADC$ и намиране на $\cos 2\varphi = \dfrac{p-2b}{2b}$; **2 т.** за прилагане на косинусова теорема за $\triangle ABC$ и достигане до равенството $a - b = \frac{c}{2}$; **1 т.** за достигане до отговора.

(Синтетичен подход) **1 т.** за построяване на вписаната окръжност; **2 т.** за въвеждане на точката Q и отчитане на факта, че $Q \in CD$; **1 т.** за доказателство на факта, че $Q \in CD$; **1 т.** за $\triangle IPA \sim \triangle QPD$; **2 т.** за достигане до отговора.

Задача 10.3. Виж задача 9.3.

Задача 10.4. Да се намерят всички естествени числа n, такива че за всяко x е изпълнено равенството:

$$(\sin x)^{2n} + (\cos x)^{2n} + n\sin^2 x\cos^2 x = 1.$$

Решение. При $x = \dfrac{\pi}{4}$ даденото равенство придобива вида $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{n}{4} = 1$ и оттук получаваме $1 + (n-4)2^{n-3} = 0$. Ако $n \geqq 4$, това равенство не е изпълнено, понеже $1+(n-4)2^{n-3} > 0$. Ако $n \leqq 3$, проверката показва, че то е изпълнено само при $n = 2$ и $n = 3$ и ще докажем, че при тези стойности даденото равенство е тъждество.

При $n = 2$ имаме $\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = 1$, за всяко x.

При $n = 3$ имаме $\sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) + 3\sin^2 x\cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x\cos^2 x = 1$, за всяко x

Следователно търсените естествени числа са $n = 2$ и $n = 3$.

Инструкции за оценяване: 2 т. за достигане до $1 + (n-4)2^{n-3} = 0$ (или друго равенство от този вид); **2 т.** за показване, че това равенство е изпълнено само при $n = 2$ и $n = 3$; **1 т.** за доказване, че при $n = 2$ даденото равенство е изпълнено за всяко x; **2 т.** за доказване, че при $n = 3$ даденото равенство е изпълнено за всяко x.

Задача 10.5. Виж задача 9.5.

Задача 10.6. Виж задача 9.6.

Автори на задачите:

Петър Бойваленков – 9.1, 9.4;

Иван Тонов – 9.3(10.3), 10.2;

Стоян Боев – 9.2, 9.5(10.5), 10.1;

Керопе Чакърян – 9.6(10.6), 10.4.