



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО

Шумен, ул. "Цар Калоян" №1, тел./факс 800-373; e-mail : rio-shumen@icon.bg

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 ГОД.

ТЕМА ЗА IX КЛАС

Задача 1. Да се реши:

а) уравнението $\frac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5} + \frac{6x + 10}{2x^2 - 3x + 5} = 3$; **3,5 точки**

б) системата уравнения $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x + y)^2 \\ xy = 2(x + y). \end{cases}$ **3,5 точки**

Задача 2. Да се реши уравнението $\frac{3(x - 2) + 4\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}{2(x^2 - 1)} = 1$. **7 точки**

Задача 3. През върха A на квадрат $ABCD$ са прекарани два лъча, ъгълът между които е 45° . Единият лъч пресича страната BC и диагонала BD съответно в точките M и N , а другият - страната CD и диагонала BD съответно в точките P и Q . Да се докаже, че C, M, N, Q, P са точки от една окръжност.

7 точки

До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.

Време за работа – 4 часа.

ЖЕЛАЕМ ВИ УСПЕХ!

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

9.1 а) За $x \neq -\frac{5}{3}$, **(0,25 т.)** полагаме $y = \frac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5}$ **(0,25 т.)**

тогава $y + 2 \cdot \frac{1}{y} = 3 \Rightarrow y_1 = 1, y_2 = 2$ **(1 т.)**

$\frac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5} = 1 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$ **(1 т.)** $\frac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5} = 2 \Rightarrow x_3 = 5, x_4 = -\frac{1}{2}$. **(1 т.)**

б) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x+y)^2 \\ xy = 2(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4 + y^4 = 17(x+y)^2 \\ (x+y)^2 = \frac{x^2 y^2}{4} \end{cases} \xrightarrow{0,5 \text{ точки}} x^4 + y^4 = \frac{17}{4} x^2 y^2$

$x^4 - 2x^2 y^2 + y^4 - \frac{9}{4} x^2 y^2 = 0$ **(0,25 т.)** от второто уравнение на системата получаваме

$(x^2 - y^2)^2 - 9(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 3(x+y))(x^2 - y^2 - 3(x+y)) = 0$ **(0,25 т.)**

$= (x+y)^2 (x-y+3)(x-y-3) = 0$ **(0,5 т.)** Тогава системата е равносилна с

$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$ или $\begin{cases} x-y+3=0 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$ или $\begin{cases} x-y-3=0 \\ xy=2(x+y) \end{cases}$ **(1 т.)**

$(0; 0), (6; 3), (1; -2), (3; 6)$ и $(-2; 1)$ са решения и на дадената система. **(0,75 т.)**

9.2. $\frac{3(x-2) + 4\sqrt{2x^2 - 3x + 1}}{2(x^2 - 1)} = 1$ ДО $x \in (-\infty; -1) \cup \left[-1; \frac{1}{2}\right] \cup (1; +\infty)$

$3x - 6 + 4\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 2x^2 - 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 2x^2 - 3x + 1 + 3$ **(2 т.)**

пол. $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = u$ **(1 т.)** $u^2 - 4u + 3 = 0 \Rightarrow u_1 = 1, u_2 = 3$ **(1 т.)**

$\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 1 \Rightarrow$ Извод за $x_1 = 0; x_2 = 1,5$. **(1, 5 т.)**

$\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = 3 \Rightarrow$ Извод за $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{73}}{4}$ **(1,5 т.)** защото 4-те числа са и от ДО.

9.3. а) От върховете, A и B на квадрата QM се вижда под равни ъгли $\angle QAM = \angle QBM = 45^\circ$. Следователно около четириъгълника $ABMQ$ може да се опише окръжност. **(1 т.)** В този четириъгълник $\angle ABM = 90^\circ \Rightarrow \angle AQM = 90^\circ$, т.е. $MQ \perp AP$. **(2 т.)**

б) Аналогично около четириъгълника $ANPD$ може да се опише окръжност и $\angle ANP = 90^\circ$. $AM \perp PN$. **(2 т.)** Следователно от точки C, Q, N отсечката PM се вижда под прав ъгъл. **(1 т.)** Следователно PM е диаметър на окръжност минаваща през C, Q, N . **(1 т.)**