МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – ХАСКОВО

6300 Хасково, ул. "П. Евтимий" № 2, тел./факс 038/62 25 03, e-mail: rio_haskovo@mon.bg

Национална олимпиада по математика
Общински кръг – 25 февруари 2010 год.

ТЕМА ЗА XI КЛАС

Зад. 1 Сумата на три числа, образуващи растяща аритметична прогресия, е 9. Ако прибавим към тях съответно числата 2, 3 и 7, ще получим геометрична прогресия.

а) Намерете числата. (5 точки)

б) Колко последователни члена от аритметичната прогресия трябва да вземем, така че сумата им да е 36? (2 точки)

Зад. 2 **а)** За кои стойности на x трите числа 1, $\lg(10^x-1)$, $\lg(10^x+19)$, взети в посочения ред, образуват аритметична прогресия? (3 точки)

б) Намерете всички цели числа, които са решения на неравенството:

$$\frac{3^{2x+1}-31.3^x-19}{3^{x+1}-1}\le -1$$

(4 точки)

Зад. 3 **а)** Да се намери сборът на острите ъгли α и β, ако tgα и tgβ са корените на уравнението $x^2-ax+a+1=0$, $a\neq 0$. (3 точки)

б) Да се намерят радиусите на описаната и на вписаната окръжности за равнобедрен триъгълник, който има периметър **2p** и ъгъл **α** при основата.

(4 точки)

Време за работа : 4 астрономически часа

Желаем Ви успех!

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ - 25.02.2010 г.

ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА
XI клас

1 зад. **а)** нека първоначалните числа, образуващи растяща аритметична прогресия са:
$\div$ a_1, a_1+d, a_1+2d $\Rightarrow 3a_1+3d=9 \Rightarrow a_1=3-d$ 1 точка

$\div\div a_1+2, a_1+d+3, a_1+2d+7 \Rightarrow \dfrac{a_1+d+3}{a_1+2}=\dfrac{a_1+2d+7}{a_1+d+3}$ 1 точка

след заместване на a_1 с 3-d се получава уравнението $d^2+5d-14=0$, 1 точка
което има два корена $d_1=2; d_2=-7$; -7<0 $\Rightarrow$ не е решение; при d=2 $\Rightarrow a_1=1$ 1 точка
$\Rightarrow$ първоначалните числа са 1;3;5. 1 точка

б) за $\div$ $a_1=1; d=2; S_n=36$ $\Rightarrow$ след заместване във формулата за сумата от първите n члена се получава $n^2=36 \Rightarrow n=\pm 6, но\ \ n=-6\notin N \Rightarrow\ n=6$ е броят на членовете.
2 точки

2 зад. **а)** $1, \lg(10^x-1), \lg(10^x+19)$ образуват аритметична прогресия $\Rightarrow$
$2\lg(10^x-1)=1+\lg(10^x+19)$ ДС x>0 1 точка
$(10^x-1)^2=10(10^x+19)$ 1точка
След полагане на $10^x=y>0$ се получава уравнението $y^2-12y-189=0$
$y_1=21$; $y_2=-9$
$y_2=-9<0$ не е решение; от $10^x=21 \Rightarrow x=\lg 21$ 1 точка

б) $\dfrac{3^{2x+1}-31.3^x-19}{3^{x+1}-1} \le -1 \Leftrightarrow \dfrac{3^{2x}.3-31.3^x-19}{3^x.3-1}+1 \le 0$

$3^x=y>0$ $\quad \dfrac{3y^2-28y-20}{3y-1} \le 0$; 1 точка

ДС: $y \ne \dfrac{1}{3}$; $y>0$ Решаване на неравенството и намиране $y \in \left(\dfrac{1}{3};10\right]$ 1 точка

от $y>\dfrac{1}{3} \Rightarrow 3^x>3^{-1} \Leftrightarrow x>-1$; $y \le 10 \Rightarrow 3^x \le 10 \Leftrightarrow x \le \log_3 10 \ \Rightarrow x \in (-1;\log_3 10]$ 1 точка
от полученият интервал следва : целите числа, решения на неравенството са 0;1;2. 1 точка

3 зад. **а)** от формулите на Виет за уравнението $x^2-ax+a+1=0, a \ne 0$
$x_1+x_2=a$ и $x_1x_2=a+1 \ \Rightarrow tg\alpha+tg\beta=a; tg\alpha.tg\beta=a+1$ 1 точка
от $tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha.tg\beta} \quad \Rightarrow tg(\alpha+\beta)=\dfrac{a}{1-a-1}=-1$ 1 точка

$\Rightarrow tg(\alpha+\beta)=-1=tg135^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=135^0 \quad ;(0^\circ\langle\alpha+\beta\langle 180^\circ)$ 1 точка

б) означаваме бедрата на равнобедрения триъгълник с a, а основата – c

От косинусова теорема за триъгълника $\Rightarrow$ $c^2 - 2ac\cos\alpha = 0$; $c = 0$ не е решение $\Rightarrow c = 2a\cos\alpha$ 1 точка

$2p = 2a + c \Rightarrow p = a(1+\cos\alpha) \Leftrightarrow a = \dfrac{p}{1+\cos\alpha}$ 1 точка

синусова теорема $R = \dfrac{a}{2\sin\alpha} = \dfrac{p}{2\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$ 1 точка

от S=pr $\Leftrightarrow r = \dfrac{S}{p}$; S= $\dfrac{ac\sin\alpha}{2} = \dfrac{a.2a\cos\alpha.\sin\alpha}{2} = \dfrac{p^2\cos\alpha\sin\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}$

$r = \dfrac{p\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}$ 1 точка

Оценяването е примерно. Всеки друг верен вариант на решение се оценява с максималния брой точки.

За областен кръг се класират ученици, получили минимум 16 точки.