МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

XI клас

Зад.1 Дадена е редицата с общ член $a_n = n^2 + n - 1$.

а) Да се намерят a_1, a_7 *и* a_{21}.

б) Да се докаже, че числото 239 е член на редицата и да се намери номерът му.

в) Да се докаже, че редицата е растяща.

(7 точки)

Зад.2 Три положителни числа образуват геометрична прогресия и сумата им е 39. Първото от тях е пети, а второто – осми член на аритметична прогресия, за която сумата на първите девет члена е равна на третото от дадените числа. Да се намерят прогресиите.

(7 точки)

Зад.3 Даден е квадрат *ABCD* с дължина на страната 1. Точка *O* е пресечна точка на диагоналите *AC* и *BD*, а точка *M* е от полуравнината, ограничена от *AB*, в която не лежи *ABCD*. Нека *MA=a*, *MC=c* и разстоянието от точка *M* до *AC* е *d*. Да се докаже, че:

а) $tg\angle AMC = \dfrac{2\sqrt{2}d}{a^2 + c^2 - 2} = \dfrac{2\sqrt{2}d}{2.MO^2 - 1}$;

б) $tg^2\angle AMC + tg^2\angle BMD = \dfrac{8MO^2}{(2MO^2 - 1)^2}$.

(7 точки)

Време за работа-4 часа.

Желаем Ви успех!

math-bg.com

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Регионален инспекторат по образованието - гр. Враца
ул. "Св.С.Врачански" №6, ☎/факс (092) 624643

ОБЩИНСКИ КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО МАТЕМАТИКА
28.02.2010г.

Примерни кратки решения на задачите и указания за оценяване

XI клас

Зад.1 а) $a_1 = 1,\ a_7 = 55$ *и* $a_{21} = 461$ **(3 точки).**

б) Намиране на *n=15,* т.е. $239 = a_{15}$ **(2 точки).**

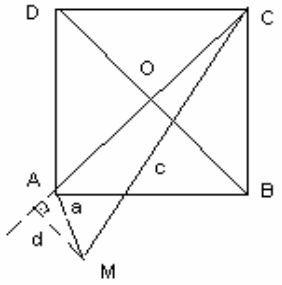
в) $a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 + (n+1) - 1 - (n^2 + n - 1) = 2n + 2 > 0\ (n \in N) \Rightarrow$ *редицата е растяща* **(2 точки).**

Зад.2 Нека геометричната прогресия е $x,\ xq,\ xq^2\ \ (q > 0)$, а аритметичната прогресия е $b_1, b_1 + d, b_1 + 2d, \ldots\ldots$ **(1точка)**. От $S_9 = \frac{2b_1 + 8d}{2} 9 = 9(b_1 + 4d) = 9x$ и $S_9 = xq^2$ намираме $q^2 = 9 \Rightarrow q = 3\ (q > 0)$ **(2 точки).**

От равенствата $x + xq + xq^2 = 39$ и $q = 3$ намираме $x = 3$ **(1точка)**.

От $x = b_1 + 4d$ и $xq = b_1 + 7d$ (по условие) получаваме система от две уравнения с две неизвестни**(1точка)**, откъдето $d = \frac{xq - x}{3} = 2$ **(0,5точки)** и $b_1 = \frac{7x - 4xq}{3} = -5$ **(0,5 точки)**.

Следователно търсената геометрична прогресия е: 3, 9, 27,… **(0,5 точки)**;
Аритметичната прогресия е: -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, ……**(0,5 точки)**.



Зад.3 а) $AC = \sqrt{2}$ (Питагорова теорема за ΔABC)**(0,5 точки)**.

$\sin\angle AMC = \frac{2S_{AMC}}{ac} = \frac{AC.d}{ac} = \frac{\sqrt{2}d}{ac}$ **(1 точка).**

$\Rightarrow \cos\angle AMC = \frac{a^2 + c^2 - 2}{2ac}$ (Косинусова теорема за ΔAMC) **(1точка)**.

$\Rightarrow tg\angle AMC = \frac{2\sqrt{2}d}{a^2 + c^2 - 2}$ **(0,5 точки)**.

От формулата за медианата MO в ΔAMC получаваме $4MO^2 = 2a^2 + 2c^2 - 2 \Rightarrow a^2 + c^2 = 2MO^2 + 1$ **(1 точка)**

$\Rightarrow tg\angle AMC = \frac{2\sqrt{2}d}{a^2 + c^2 - 2} = \frac{2\sqrt{2}d}{2MO^2 - 1}$ **(0,5 точки)**.

б) $tg\angle AMC = \frac{2\sqrt{2}d}{2.MO^2 - 1}$ /доказано в подточка а)/.

Аналогично $tg\angle BMD = \frac{2\sqrt{2}h}{2MO^2 - 1}$, където h е разстоянието от точка M до BD**(1 точка)**.

Но $d^2 + h^2 = MO^2$ (Питагорова теорема) **(0,5 точки)**.

$\Rightarrow tg^2\angle AMC + tg^2\angle BMD = \frac{8(d^2 + h^2)}{(2MO^2 - 1)^2} = \frac{8MO^2}{(2MO^2 - 1)^2}$ **(1точка)**.

math-bg.com