



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО

Шумен, ул. "Цар Калоян" №1, тел./факс 800-373; e-mail : rio-shumen@icon.bg

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА

ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 ГОД.

ТЕМА ЗА XI КЛАС

1 задача. а) Три числа, сумата на които е равна на 28, образуват геометрична прогресия. Ако към първото число прибавим 3, към второто 1, а от третото извадим 5, то получените числа образуват аритметична прогресия. Намерете тези числа.

3 точки

б) Две аритметични прогресии имат равен брой членове. Отношенията на последния член на първата прогресия към първия член на втората прогресия и на последния член на втората прогресия към първия член на първата са равни. Това отношение е равно на 4. Отношението на сумата от членовете на първата прогресия към сумата от членовете на втората прогресия е равно на 2. Намерете отношението на разликите на тези прогресии.

4 точки

2 задача. Дадено е уравнението $2 \cdot 4^x + (2a - 1) \cdot 2^x - 4a^2 - 2a = 0$, където a е реален параметър.

а) Да се реши уравнението, ако $a = -1$.

3 точки

б) Да се намерят всички стойности на a , за които уравнението има два различни реални корена.

4 точки

3 задача. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB . Нека M и O са съответно центровете на описаната и вписаната окръжности за триъгълника ABC и точката O дели ъглополовящата AP (P лежи на BC) в съотношение $\frac{AO}{OP} = 2 + \sqrt{3}$. Да се пресметнат:

а) ъглите на триъгълник ABC ;

3 точки

б) отношението на лицата на триъгълниците CO_1O_2 и O_1O_2M , където O_1 и O_2 са центровете на вписаните в триъгълниците AMC и BMC окръжности.

4 точки

До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.

Време за работа – 4 часа.

ЖЕЛАЕМ ВИ УСПЕХ!

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

11.1. а) Отг. 4; 8; 16. (за верни формули на прогресиите – 1 т., за вярно изразени връзки в задачата - 1 т. и за намерени 3 числа – 1 т.)

11.1. б) I прогресия има членове $a_1; a_2 \dots a_n$ II прогресия има членове $b_1; b_2 \dots b_n$

$$\frac{a_n}{b_1} = \frac{b_n}{a_1} = 4 \text{ и } \frac{S_{n_1}}{S_{n_2}} = 2 \text{ и } n_1 = n_2 = n \text{ (1 т.)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 4b_1 \\ \frac{S_{n_1}}{S_{n_2}} = 2 \\ b_n = 4a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + (n-1)d_1 = 4b_1 \\ \frac{2a_1 + (n-1)d_1 \cdot n}{2b_1 + (n-1)d_2 \cdot n} = 2 \\ b_1 + (n-1)d_2 = 4a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} = 26; \text{ За описание на всяко от трите равенства}$$

във втората система чрез съответните формули – (1,5 т.). За вярно намерено отношение – (1,5 т.).

$$11.2 \text{ a)} 2 \cdot 4^x + (2a-1) \cdot 2^x - 4a^2 - 2a = 0 \quad a = -1 \Rightarrow 2 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x - 2 = 0 \text{ (1т.)}$$

$$\text{пол. } 2^x = y \Rightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0 \quad y_1 = 2, y_2 = -\frac{1}{2} \text{ (1 т.)} \quad 2^x = 2 \Rightarrow x_1 = 1 \quad 2^x = -\frac{1}{2} \text{ (1 т.)}$$

$$\text{б)} 2y^2 + (2a-1)y - 4a^2 - 2a = 0 \text{ ако } x_{1,2} \in R$$

$$\Rightarrow y_1, y_2 \in (0; x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 > 0 \\ y_1 y_2 > 0 \\ D > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{2a+1}{2} > 0 \Rightarrow a < \frac{1}{2} \\ \frac{-4a^2 - 2a}{2} > 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} < a < 0 \Rightarrow a \in \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(-\frac{1}{6}; 0\right) \\ (2a-1)^2 - 8(-4a^2 - 2a) > 0 \end{cases}$$

(за всяка еквивалентна стъпка по 1 точка = 4 т.)

11.3. а) Означаваме $\angle BAC = \alpha$, $\angle CAP = \angle BAP = \frac{\alpha}{2}$.

$$3 \text{ а) } \square APC \quad \frac{AO}{OP} = \frac{AC}{CP} = \cot g \frac{\alpha}{2} = 2 + \sqrt{3}. \quad \tg \alpha = \frac{2 \tg \frac{\alpha}{2}}{1 - \tg^2 \frac{\alpha}{2}} \quad (1 \text{ т.}) \quad \tg \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

$$(0,5 \text{ т.}) \quad \tg \alpha = \frac{2(2-\sqrt{3})}{1-(2-\sqrt{3})^2} = \frac{2(2-\sqrt{3})}{4\sqrt{3}-6} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30^\circ; \angle BAC = 30^\circ; \angle ABC = 60^\circ \text{ (1 т.)}$$

т. за преобразуване и 0,5 т. за извод = 1,5 т.)

6) $O_1M \perp O_2M$ - ъглополовящи на два съседни ъгъла.

$$\angle O_1MO_2 = 90^\circ \quad \angle ACO_1 = \angle MCO_1 \quad \angle BCO_2 = \angle MCO_2 \Rightarrow \angle O_1CO_2 = 45^\circ = \frac{1}{2} \angle ACB \text{ (0,5т.)}$$

$$S_1 = S_{O_1O_2C} = \frac{1}{2} CO_1 \cdot CO_2 \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} CO_1 \cdot CO_2 \quad S_2 = S_{O_1O_2M} = \frac{1}{2} MO_1 \cdot MO_2$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{CO_1 \cdot CO_2}{MO_1 \cdot MO_2} \quad (3 \times 0,5 \text{ т.})$$

B $\square BMC$ $\angle B = 60^\circ$; $CM = BM \Rightarrow MO_2 = CO_2$ (**0,5 т.**)

B $\square AMC$ $\angle AMC = 120^\circ$ $\angle ACM = 30^\circ$ $\angle O_1MC = 60^\circ$ $\angle O_1CM = 15^\circ$ (**0,5 т.**)

$$\text{B } \square O_1MC \quad \frac{CO_1}{MO_1} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)} = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{3}}{2} \cdot (\textbf{1 т.})$$