



## МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

### **РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО**

Шумен, ул. "Цар Калоян" №1, тел./факс 800-373; e-mail : [rio-shumen@icon.bg](mailto:rio-shumen@icon.bg)

### **ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА**

### **ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 ГОД.**

#### **ТЕМА ЗА X КЛАС**

**1 задача.** За кои стойности на параметъра  $p$  върхът на параболата  $y = x^2 + 2px + 13$  лежи на разстояние 5 единици от началото на координатната система?

**7 точки**

**2 задача.** Даден е изразът  $M = \left( \frac{a-9}{a+3\sqrt{a}+9} \cdot \left( \frac{\frac{1}{a^2}+3}{\frac{3}{a^2}-27} \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a}$ .

a) Опростете израза  $M$ .

**3 точки**

б) Намерете стойностите на  $a$ , за които числената стойност на  $M$  е решение на неравенството:  $-x^2 > -2\sqrt{3}x + x - 2\sqrt{3}$ .

**4 точки**

**3 задача.** Нека  $AB$  е хорда в окръжността  $k$  и допирателните към  $k$  в точките  $A$  и  $B$  се пресичат в точка  $C$ . Нека  $P$  е произволна точка от  $k$ , която е вътрешна за триъгълника  $ABC$ . Ако  $PD$ ,  $PE$  и  $PM$  са разстоянията от  $P$  съответно до  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , да се докаже, че  $PD^2 = PE \cdot PM$ .

**7 точки**

*До областен кръг ще бъдат допуснати тези ученици, на които броят на точките е най-малко 16.*

*Време за работа – 4 часа.*

**ЖЕЛАЕМ ВИ УСПЕХ!**

## ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ПРОВЕРКА И ОЦЕНКА

**10.1.** Върхът на параболата има координати  $V(x_V; y_V) = V(-p; 13 - p^2)$ . (2 т.)

Прилагаме Питагоровата теорема за

$$x_V^2 + y_V^2 = 5^2 \stackrel{2 \text{ точки}}{\Leftrightarrow} (-p)^2 + (13 - p^2)^2 = 25 \Leftrightarrow p^4 - 25p^2 + 144 = 0 \quad (2 \text{ т.})$$

Корените на уравнението са  $p = \pm 3; \pm 4$ . (1 т.)

**10.2. а)**

$$\begin{aligned} M &= \left( \frac{a-9}{a+3\sqrt{a}+9} \cdot \left( \frac{\frac{1}{a^2}+3}{\frac{3}{a^2}-27} \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a} = \left( \frac{a-9}{a+3\sqrt{a}+9} \cdot \frac{\frac{3}{a^2}-27}{\frac{1}{a^2}+3} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a} \stackrel{0,5 \text{ точки}}{=} \\ &= \left( \frac{(\sqrt{a})^2 - 3^2}{a+3\sqrt{a}+9} \cdot \frac{(\sqrt{a})^3 - 3^3}{\sqrt{a}+3} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a} \stackrel{0,5 \text{ точки}}{=} \left( \frac{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a}+3)}{(\sqrt{a})^2 + 3\sqrt{a}+9} \cdot \frac{(\sqrt{a}-3)(\sqrt{a})^2 + 3\sqrt{a}+9}{(\sqrt{a}+3)} \right)^{\frac{1}{2}} - \sqrt{a} \stackrel{0,5 \text{ точки}}{=} \\ &= \sqrt{(\sqrt{a}-3)^2} - \sqrt{a} \stackrel{0,25 \text{ точки}}{=} |\sqrt{a}-3| - \sqrt{a} \stackrel{1 \text{ точка}}{=} \end{aligned}$$

1 сл. При  $\sqrt{a} - 3 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq 9 \Rightarrow M = \sqrt{a} - 3 - \sqrt{a} = -3$

2 сл.  $\sqrt{a} - 3 < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a < 9 \end{cases} \Rightarrow M = -\sqrt{a} + 3 - \sqrt{a} = 3 - 2\sqrt{a}$  (за извод **0,25 т.**)

6)  $-x^2 > -2\sqrt{3}x + x - 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 - (2\sqrt{3} - 1)x + 2\sqrt{3} < 0 \Rightarrow x \in (-1; 2\sqrt{3})$  (1,5 т.)

$M = -3$  не е решение на неравенството (**0,5 т.**)

$M = 3 - 2\sqrt{a}$  (**0,5 т.**) е решение на неравенството при

$$\begin{cases} -1 < 3 - 2\sqrt{a} < 2\sqrt{3} \\ a \geq 0 \\ a < 9 \end{cases} \Rightarrow a \in [0; 4) \text{ верен извод от съобразяване на сечение на}$$

интервали – (**0,5 т.**)

**10.3** Около четириъгълниците ADPM и DBEP съответно може да се опише окръжност.

(0,5 т.) Тогава  $\angle PAM = \angle PDM$  (1,5 т.) и  $\angle PBD = \angle PED$ . (1,5 т.) Но

$\angle PAM = \angle PBD$ . (1,5 т.) Оттук следва, че  $\angle PED = \angle PDM$ . (0,5 т.) Аналогично се доказва, че  $\angle PDE = \angle DMP$ . (0,5 т.) Тогава  $\Delta MPD \square \Delta DPE$  (0,5 т.) и  $\frac{PD}{PE} = \frac{PM}{PD}$ ,

(0,25 т.) откъдето получаваме  $PD^2 = PE \cdot PM$ . (0,25 т.)