# Министерство на образованието, младежта и науката

## 59. Национална олимпиада по математика

### Областен кръг, Първи ден, 17 април 2010 г.

### Тема за 9. клас

**Задача 1.** Да се намерят всички стойности на реалния параметър $a$, за които корените $x_1$ и $x_2$ на уравнението $x^2 + (\sqrt{a+1} - a)x - 1 = 0$ са реални и удовлетворяват равенството

$$x_1^2 + x_2^2 + a^2 = 2a(x_1 + x_2) + 2 + \sqrt{a^3 + a^2 - 14a + 25}.$$

**Задача 2.** В даден четириъгълник $ABCD$ може да се впише окръжност $k$, която се допира до страните $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$ в точките $M$, $N$, $P$ и $Q$ съответно. Нека $S$ е средата на хордата, получена от пресичането на диагонала $AC$ с окръжността $k$. Да се докаже, че е изпълнено равенството

$$SM.SQ = SN.SP.$$

**Задача 3.** Върху успоредните прави $a$ и $b$ са взети съответно точките $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ и $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$, които са две по две различни. Да се намери минималният възможен брой различни точки, получени при пресичането на отсечките $A_iB_j$, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4$. (Включително самите точки $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ и $B_1$, $B_2$, $B_3$, $B_4$.)

*Време за работа*: 4 часа и 30 минути.