Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 17 април 2010 г.

Тема за 12. клас

Задача 1. Да се реши неравенството

$$2^{2ax+1} + 2^a \leq 2^{ax} + 2^{ax+a+1},$$

където a е реален параметър.

Задача 2. Нека $a_1 > 1$ и $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n} - 1$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

а) редицата (a_n) е сходяща и да се намери нейната граница;

б) съществува n, за което $a_{2n} < 1 + \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

Задача 3. Дени попълва с ненулево цяло число някой от коефициентите на уравнение от 2010-та степен, след това Вени попълва също с ненулево цяло число друг от коефициентите и т.н., докато бъдат попълнени всичките 2011 коефициента. Дени печели, ако полученото уравнение има целочислен корен, а в противен случай печели Вени. Коя от двете има печеливша стратегия?

Време за работа: 4 часа и 30 минути

math-bg.com