

# Министерство на образованието, младежта и науката

## 59. Национална олимпиада по математика

**Областен кръг, Втори ден, 18 април 2010 г.**

**Тема за 9. клас**

**Задача 4.** Да се реши системата

$$\begin{cases} x + ay^2 + a^2z^2 = a^2 \\ x + by^2 + b^2z^2 = b^2 \\ x + cy^2 + c^2z^2 = c^2, \end{cases}$$

където  $a, b$  и  $c$  са реални параметри ( $a \neq b, b \neq c, c \neq a$ ).

**Задача 5.** Даден е  $\triangle ABC$  с ортоцентър  $H$  и център на вписаната окръжност  $I$ . Окръжност, минаваща през върховете  $A$  и  $B$  пресича страните  $CA$  и  $CB$  за втори път в точките  $P$  и  $Q$  съответно.

- Ако  $I$  лежи на отсечката  $PQ$ , да се докаже, че  $AP + BQ = PQ$ ;
- Ако  $H$  лежи на отсечката  $PQ$ , да се докаже, че  $\frac{AP}{AH} + \frac{BQ}{BH} = \frac{PQ}{CH}$ .

**Задача 6.** Нека  $n$  е естествено число. Да се намери най-малкото естествено число  $k$ , за което съществуват естествени числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , такива че

$$7 \cdot 2^n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2.$$

*Време за работа: 4 часа и 30 минути.*