

Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 18 април 2010 г.

Тема за 12. клас

Задача 4. В пространството са дадени правоъгълен $\triangle ABC$ с хипотенуза AB и равнина τ . Нека $\alpha = \measuredangle(AC, \tau)$, $\beta = \measuredangle(BC, \tau)$ и $\varphi = \measuredangle(ABC, \tau)$.

- а) Да се докаже, че $\sin^2 \varphi = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$.
- б) Ако $\alpha + \beta = 60^\circ$, да се намери най-малката стойност на φ .

Задача 5. Могат ли четири различни реални числа, които са измежду нулите на полином от трета степен и неговата производна, да образуват аритметична прогресия?

Задача 6. Нека $f(x)$ е полином с цели коефициенти и n е дадено естествено число. Известно е, че за всеки две цели числа a и b , за които $a - b$ се дели на n , числата $f(a)$ и $f(b)$ не са взаимно прости. Да се докаже, че съществува просто число p , за което p дели $f(x)$ за всяко цяло число x .

Време за работа: 4 часа и 30 минути