Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 18 април 2010 г.

Тема за 11. клас

Задача 4. Даден е остроъгълен триъгълник ABC за който $\cos \sphericalangle BAC = \frac{1}{3}$. Правата през A, успоредна на медианата BM, $M \in AC$ пресича продължението на височината CC_1, $C_1 \in AB$ в точка D. Ако $CC_1 : C_1D = 2 : 1$, да се намери отношението $\frac{R}{r}$ където R и r са съответно радиусите на описаната и вписаната окръжност за $\triangle ABC$.

Задача 5. Клетките на таблица с 2009 реда и 2011 стълба са оцветени шахматно. Да се намери най-голямото естествено число k със следното свойство. При изтриване на произволни k клетки на таблицата, така че измежду неизтритите клетки има равен брой бели и черни, останалата част от таблицата (т.е. неизтритите клетки) може да се покрие с домина. (Доминото се състои от две клетки с обща страна).

Задача 6. Нека $f(x)$ е полином с цели коефициенти и n е дадено естествено число. Известно е, че за всеки две цели числа a и b, за които $a - b$ се дели на n, числата $f(a)$ и $f(b)$ не са взаимно прости. Да се докаже, че съществува просто число p, за което p дели $f(x)$ за всяко цяло число x.

Време за работа: 4 часа и 30 минути