***Минно-геоложки Университет "Свети Иван Рилски"***

***КРАТКИ РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ***

***12.07.2007 г.***

## *ВАРИАНТ 1*

**Задача 1.** Дадено е уравнението $9^x - 4.3^x + 4 = p$, където $p$ е реален параметър.

**1.1.** Решете уравнението при $p = 1$.

**РЕШЕНИЕ:** $p = 1 \Rightarrow 9^x - 4.3^x + 4 = 1 \Rightarrow (3^x)^2 - 4.3^x + 3 = 0$

$3^x = u > 0$, $u^2 - 4u + 3 = 0$, $u_1 = 1 > 0$, $u_2 = 3 > 0$

$3^x = 1 \Rightarrow x = 0$; $3^x = 3 \Rightarrow x = 1$.

Отг. $x_1 = 0, x_2 = 1$.

**1.2**. За кои стойности на параметъра $p$ уравнението има два реални различни корена?

**РЕШЕНИЕ:** $\forall p$**:** $(3^x)^2 - 4.3^x + 4 - p = 0$

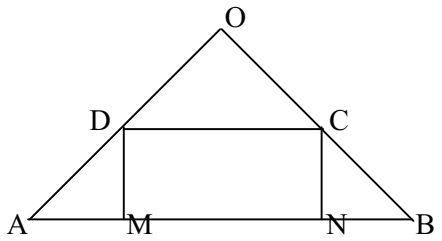
$3^x = u > 0$, $u^2 - 4u + 4 - p = 0$.

От условието следва, че полученото квадратно уравнение трябва да има два различни положителни корена, откъдето достигаме до системата: $\left| \begin{array}{l} D = 4^2 - 4(4-p) > 0 \\ u_1 + u_2 = 4 > 0 \\ u_1 u_2 = 4 - p > 0 \end{array} \right.$.

Решението на получената система е $p \in (0, 4)$.

**Задача 2.** Даден е равнобедрен трапец, продълженията на бедрата на който се пресичат под прав ъгъл. Височината на трапеца е с дължина 2 см, а лицето му е 12 см$^2$. Намерете дължините на страните на трапеца.

**РЕШЕНИЕ:**




Означаваме с $a$ дължината на голямата основа на трапеца, с $b$ - дължината на малката му основа и с $c$ - дължината на бедрата на трапеца. Тогава $a + b = \frac{2S}{h} = \frac{2.12}{2} = 12$ см.

Тъй като по условие триъгълникът ABO е равнобедрен и правоъгълен,

$$\angle ABC = \angle BAD = 45^\circ.$$

Ако точките M и N са съответно проекциите на D и C върху голямата основа на трапеца, триъгълниците AMD и BNC са еднакви равнобедрени правоъгълни триъгълници.

Тогава $BN = AM = CN = h = 2$ см, $BC = AD = 2\sqrt{2}$ см.

$MN = CD = b$; $AM + NB = a - b$, откъдето получаваме $a - b = 4$ см.

Тогава $AB = a = 8$ см, $CD = b = 4$ см.

**Задача 3.** Дадени са функциите $f(x) = ax^2 - 3x + 1$ и $g(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{6-3b}{2}x^2 - 2(b+4)x + 8$, където $a$ и $b$ са реални параметри. Намерете:

**3.1.** стойностите на параметъра $a$ от интервала $[1;\infty)$, за които сумата от корените на уравнението $f(x) = 0$ е най-голяма;

**РЕШЕНИЕ:** $f(x) = ax^2 - 3x + 1$. ДМ: $x \in (-\infty, \infty)$.

Корените на $f(x) = 0$ принадлежат на дефиниционното множество на $f(x)$, когато $D = 3^2 - 4a \geq 0$. По условие $a \geq 1 > 0$, т.е. $a \in \left[1, \frac{9}{4}\right]$.

По формулите на Виет изразяваме $x_1 + x_2 = \frac{3}{a} = \varphi(a)$, $a \in \left[1, \frac{9}{4}\right]$.

В този интервал (както и в целия $[1;\infty)$) $\varphi(a)$ е непрекъсната и строго намаляваща. Следователно $\max\limits_{[1,9/4]} \varphi(a) = \frac{3}{\min\limits_{[1,9/4]} \varphi(a)} = \frac{3}{1} = 3$.

**3.2.** най-малката и най-голямата стойности на ъгъла, който допирателната към графиката на $f(x)$ в точката с абсциса $x_0 = 1$ сключва с абсцисната ос, при $a \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$;

**РЕШЕНИЕ:** Означаваме с $\alpha$ ъгъла, който допирателната към графиката на $f(x)$ в точката с абсциса $x_0 = 1$ сключва с абсцисната ос. Тогава $tg\alpha = f'(x_0)$, където $f'(x) = 2ax - 3$.

Следователно $tg\alpha = 2a - 3 = k(a)$. Получената функция на параметъра $a$ е строго растяща и непрекъсната в $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$. Тогава

$$\min_{a \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]} k(a) = k\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} - 3 = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\max_{a \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]} k(a) = k(2) = 2.2 - 3 = 1 \Rightarrow tg\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

Отг. Най-малка стойност: 0, най-голяма стойност: $\frac{\pi}{4}$.

**3.3.** стойностите на параметъра $b$, за които $\frac{1}{g(0)}\left[g''(-2) - g'(-1)\right] = -\frac{1}{8}$.

$g(0) = 8$;

$g'(x) = x^2 - (6-3b)x - 2(b+4) \Rightarrow g'(-1) = -5b - 1$;

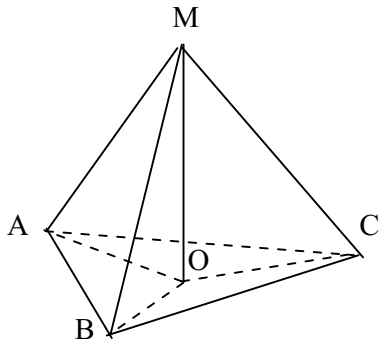
$g''(x) = 2x - (6-3b) \Rightarrow g''(-2) = 3b - 10$.

Заместваме получените стойности и получаваме уравнението

$\frac{1}{8}\left[3b - 10 - (-5b - 1)\right] = -\frac{1}{8}$, т.е. $8b - 9 = -1$.

Следователно $b = 1$.

**Задача 4.** Основата на пирамида е триъгълник с дължини на страните *a, a* и *b*. Всички околни ръбове сключват с основата ъгъл $60^0$. Намерете обема на пирамидата.




**РЕШЕНИЕ:** Обемът V на пирамидата е равен на $\frac{1}{3}S.h$, където $S$ е лицето на основата, а $h$ - височината на пирамидата.

$S = \frac{b}{4}\sqrt{4a^2 - b^2}$ (от условието и от неравенството на триъгълника следва $a > 0, b > 0, 2a > b$).

От еднаквостта на правоъгълните триъгълници $AOM$, $BOM$ и $COM$ следва, че проекцията на нейния връх в равнината на основата съвпада с центъра на описаната около основата окръжност. Означаваме радиуса на тази окръжност с $R$.

От една страна (от $\Delta ABC$) $R = \frac{a^2 b}{4S}$, а от друга - от някой от еднаквите правоъгълни триъгълници $AOM$, $BOM$ и $COM$, определяме $R = h\text{cotg } 60^\circ = \frac{h}{\sqrt{3}}$.

Следователно $h = R\sqrt{3} = \frac{a^2 b}{4S}\sqrt{3} = \frac{a^2\sqrt{3}}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$.

Обемът $V$ на дадената пирамида намираме както следва:

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2 b}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2 b\sqrt{3}}{12}.$$