РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8 КЛАС

Задача 1. Дадено е неравенството $3|x-a| \le 2x+2$, където a е параметър.

а) Да се реши неравенството при $a=-1$.

б) Да се намерят стойностите на параметъра a, за които множеството от решения на неравенството съдържа само от едно цяло число.

Решение: а) При $2x+2<0$, т.е. при $x<-1$, неравенството няма решение.

При $-1 \le x$ имаме $3|x+1| \le 2x+2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3(x+1) \le 2x+2 \\ -2x-2 \le 3(x+1) \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \le -1 \\ x \ge -1 \end{array} \right.$.

Следователно при $a=-1$, решението на неравенството е $x=-1$. **(1 т.)**

б) Неравенството има решение при $2x+2 \ge 0$, т.е. при $x \ge -1$. При $x \ge -1$ имаме

$$3|x-a| \le 2x+2 \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 3(x-a) \le 2x+2 \\ 3(x-a) \ge -2x-2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x \le 3a+2 \\ x \ge \frac{3a-2}{5} \end{array} \right. . \textbf{(1 т.)}$$

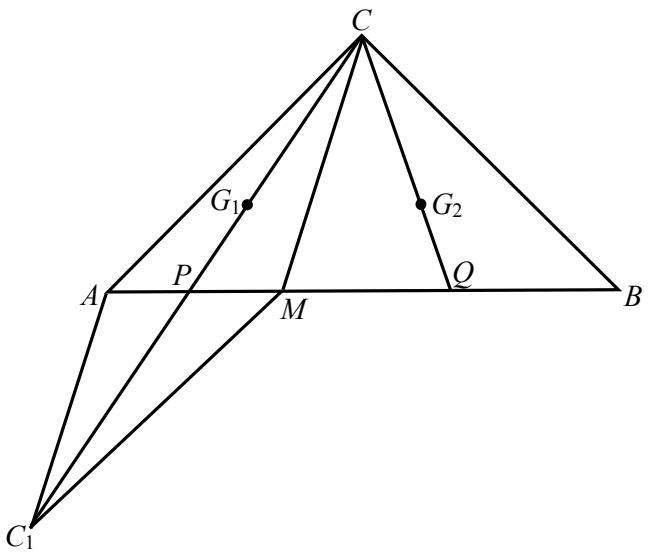
За да има неравенството решение, е необходимо $-1 \le 3a+2$, откъдето получаваме $a \ge -1$. Тъй като при $a \ge -1$ имаме $-1 \le \frac{3a-2}{5} \le 3a+2$, то решението е интервалът $\left[\frac{1}{5}(3a-2); 3a+2\right]$. **(1 т.)**

Нека m е цяло число. То ще бъде единственото цяло решение на неравенството, когато $m-1 < \frac{1}{5}(3a-2) \le m \le 3a+2 < m+1$. **(1 т.)** Оттук получаваме $\frac{5m-3}{3} < a \le \frac{5m+2}{3}$ и $\frac{m-2}{3} \le a < \frac{m-1}{3}$. **(1 т.)**. От условието $\frac{5m-3}{3} < \frac{m-1}{3}$ следва, че $m < \frac{1}{2}$, а от $\frac{m-2}{3} \le \frac{5m+2}{3}$ получаваме $m \ge -1$, т.е. $m=-1$ или $m=0$. **(1 т.)** При $m=-1$ имаме $a \le -1$ и $a \ge -1$, т.е. $a=-1$. При $m=0$ имаме $-1 < a \le \frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3} \le a < -\frac{1}{3}$, т.е. $a \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. **(1 т.)**

Окончателно неравенството има само едно цяло решение при $a=-1$ и $a \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Задача 2. Върху хипотенузата AB на равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC е взета произволна точка M. Точките G_1 и G_2 са медицентровете съответно на триъгълниците AMC и BMC. Да се докаже, че $\angle G_1CG_2 > 45°$.

Решение: Нека точките P и Q са средите съответно на отсечките AM и BM. Тъй като $G_1 \in CP$ и $G_2 \in CQ$, то $\angle G_1CG_2 = \angle PCQ$. **(1 т.)** От друга страна $\angle AMC + \angle BMC = 180°$ и следователно поне един от тези два ъгъла не е остър, т.е. поне един от тези два ъгъла е най-големият в съответния триъгълник AMC или BMC. **(1 т.)** Заключаваме, че отсечката CM е по-малка от бедрата на ΔABC. **(1 т.)** Върху продължението на CP да построим точката C_1 така, че P да е средата на CC_1. **(1 т.)** Тогава четириъгълникът



$ACMC_1$ е успоредник и оттук $\angle PCM = \angle PC_1A$. **(1 т.)** Но в триъгълника ACC_1 имаме $AC_1 = CM < AC \Rightarrow \angle ACP < \angle PC_1A \Rightarrow \angle ACP < \angle PCM$. **(1 т.)** По същия начин доказваме, че $\angle QCM > \angle BCQ$, откъдето

$$\angle PCM + \angle QCM > \angle ACP + \angle BCQ \Rightarrow \angle PCQ > 90° - \angle PCQ \Rightarrow \angle PCQ > 45°.$$ **(1 т.)**

Задача 3. Да се намерят всички цели положителни числа n, за които числото $n^5 + 3n + 4$ е степен на числото 2.

Решение: Имаме:

$$n^5 + 3n + 4 = n^5 + 3n + 3 + 1 = n^5 - n^3 + n^3 + 1 + 3n + 3 =$$
$$n^3(n-1)(n+1) + (n+1)(n^2 - n + 1) + 3(n+1) = (n+1)(n^4 - n^3 + n^2 - n + 4).$$ **(1 т.)**

От полученото разлагане следва, че числата $n+1$ и $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4$ трябва да са едновременно степени на числото 2, защото са по-големи от 1. **(1 т.)**

Нека $n + 1 = 2^k$ и $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4 = 2^m$ за някакви естествени числа k и m. Тъй като $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4 - (n+1) = n^4 - n^3 + 2 + (n-1)^2 > 0$, то $m > k$. **(1 т.)**

Но тогава от $n \equiv -1 \pmod{2^k}$ ще следва, че $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4 \equiv 8 \pmod{2^k}$. **(1 т.)**

От друга страна, $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4 = 2^m \equiv 0 \pmod{2^k}$ и получаваме, че 2^k трябва да дели 8, а това е възможно само ако $k \le 3$. **(1 т.)**

При $k = 1$, 2 и 3 намираме съответно $n = 1$, 3 и 7. **(1 т.)**

При $n = 1$ числото $n^5 + 3n + 4$ е равно на 8 и това е решение на задачата. При $n = 3$ числото $n^5 + 3n + 4$ е равно на $256 = 2^8$ и това също е решение на задачата. При $n = 7$ числото $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4$ е равно на $2^3 \cdot 263$. Следователно $n = 7$ не е решение на задачата. **(1 т.)**

Задачите са предложени, както следва:
зад. 8.1 – Чавдар Лозанов, зад. 8.2 и зад. 8.3 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев