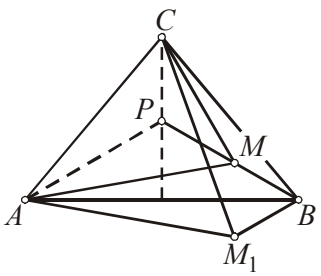
РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 КЛАС

Задача 1. Две машини с еднаква производителност могат да изпълнят половината от една поръчка за 2 часа и 30 минути, ако работят заедно. Едната от тях била заменена с нова машина, чиято производителност била с 50% по-голяма. За колко часа новата машина и една от старите машини ще изпълнят поръчката, ако работят заедно? Колко процента от цялата поръчка ще изпълни всяка от машините?

Решение: След като двете машини заедно свършват половината работа за 2 часа и 30 минути, те ще свършат цялата работа за 5 часа. Но двете машини са с еднаква производителност и следователно едната от тях би свършила работата сама за два пъти повече време, т.е. за 10 часа. Оттук намираме, че производителността на всяка от машините е $\frac{1}{10}$. **(2 т.)** Производителността на новата машина е с 50% по-голяма т.е. тя е $\frac{1}{10}+\frac{1}{2}.\frac{1}{10}=\frac{3}{20}$. **(2 т.)** Ако една от старите и новата машина свършват работата за t часа, то $\frac{1}{10}.t+\frac{3}{20}.t=1 \Leftrightarrow 5t=20 \Rightarrow t=4$. **(2 т.)** Старата машина извършва $\frac{1}{10}.4=\frac{4}{10}$ от работата, т.е. 40%, а новата – 60%. **(1 т.)**

Задача 2. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC=BC$), в който $\sphericalangle ACB=80°$. Точка M е такава, че $\sphericalangle MAB=10°$ и $\sphericalangle MBA=30°$. Да се намери $\sphericalangle AMC$.



Решение: Нека M е вътрешна точка и MB пресича височината през върха C в точка P. **(1 т.)** Тъй като $\sphericalangle ACB=80°$, то $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAC=50°$. От $\sphericalangle MAB=10°$ и $\sphericalangle MBA=30°$ следва, че $\sphericalangle AMP=40°$ и $\sphericalangle MAC=40°$. **(1 т.)** Тъй като ΔABC е равнобедрен, височината през C е и симетрала на AB, т.е. $AP=BP$. Следователно $\sphericalangle BAP=\sphericalangle ABM=30°$, откъдето $\sphericalangle MAP=20°$. Тогава $\sphericalangle CAP=40°-20°=20°$, т.е. $\sphericalangle CAP=\sphericalangle MAP$. **(1 т.)** Освен това $\sphericalangle ACP=\sphericalangle BCP=40°$. Следователно $\Delta APC \cong \Delta APM$ (II пр.). Оттук $AM=AC$. **(1 т.)** Сега намираме, че $\sphericalangle AMC=70°$. **(1 т.)**

Ако M_1 е външна точка, то $\Delta AMB \cong \Delta AM_1B$ (II пр.) и $AM_1=AM=AC$. Тъй като $\sphericalangle M_1AC=60°$, то ΔM_1AC е равностранен и $\sphericalangle AM_1C=60°$. **(2 т.)**

Задача 3. Да се намери най-малкото естествено число n, за което числото $2n^3+3n^2-1$ се дели на 2010.

Решение: Имаме

$$2n^3+3n^2-1=2n^3+2n^2+n^2-1=2n^2(n+1)+(n-1)(n+1)=(n+1)(2n^2+n-1)=$$

$$=(n+1)(n^2+n+n^2-1)=(n+1)^2(2n-1).$$ **(1 т.)**

Тъй като $2010=2.3.5.67$, то поне едно от числата $n+1$ и $2n-1$ трябва да се дели на 67. Да разгледаме двете възможности. Нека $n+1$ е кратно на 67. Тогава $n=67k-1$ за някое естествено число k. **(1 т.)** Получаваме, че $(n+1)^2(2n-1)=67^2k^2(134k-3)$. За да е изпълнена исканата делимост, трябва $k^2(134k-3)$ да се дели на 30. Числото $134k-3$ е нечетно и се дели на 3 точно когато k се дели на 3. Ето защо k трябва да се дели на 6.

(1 т.) Ако $k=6$, то $k^2(134k-3)$ не се дели на 5. При $k=12$ исканата делимост е изпълнена. Получаваме, че в разглеждания случай най-малкото число, което търсим, е $n=67.12-1=803$. **(1 т.)**

Нека сега на 67 се дели числото $2n-1$. Тогава можем да запишем, че $2n-1=67m$ за някое естествено число m. Ясно е, че m е нечетно и получаваме $2n-1=67(2l-1)$, откъдето $n=67l-33$, където l естествено число. **(1 т.)** Оттук $(n+1)^2(2n-1)=67(67l-32)^2(2l-1)$ и за да е изпълнено исканото, трябва $(2l-1)(67l-32)^2$ да се дели на 30. Тъй като $2l-1$ е нечетно, за да имаме делимост на 2, трябва l да е четно. Освен това $2l-1+67l-32=69l-33=3(23l-11)$ и заключаваме, че $2l-1$ и $67l-32$ едновременно се делят или не се делят на 3. Следователно делимост на 6 ще имаме точно когато l дава остатък 2 при деление на 6. **(1 т.)** При $l=2$ нито един от множителите $2l-1$ и $67l-32$ не се дели на 5. При $l=8$ делимостта на 5 е изпълнена и намираме $n=503$. Тъй като 503 < 803, търсеното n е 503. **(1 т.)**

Задачите са предложени, както следва:
зад. 7.1 и зад. 7.2 – Теодоси Витанов, зад. 7.3 – Светлозар Дойчев