РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6 КЛАС

Задача 1. Фирма "Екосок" пълни два вида опаковки със сок от боровинки и ги продава на една и съща цена. Първият вид има форма на правоъгълен паралелепипед с размери 1 *дм*, 0,5 *дм* и 1,5 *дм*. Вторият вид има форма на триъгълна пирамида с височина 20 *см* и основа правоъгълен триъгълник с катети 15 *см* и 14 *см*. От кой вид е по-изгодно да се купува?

Решение:
Обемът на опаковките от първия вид е $V_1 = 1.0,5.1,5 = 0,75$ *куб. дм* = 750 *куб. см*. **(3 т.)**

Обемът на опаковките от втория вид е $V_2 = \frac{15.14.20}{6} = 700$ *куб. см*. **(3 т.)**

По-изгодна е покупката на сокове от първия вид, защото $V_1 > V_2$. **(1 т.)**

Задача 2. Ани и Борис имат монети само по 1 стотинка и по 10 стотинки. Общо двамата имат между 100 и 200 монети, като Ани има толкова монети по 10 стотинки, колкото Борис има по 1 стотинка. Броят монети по 10 стотинки на Борис представлява 40% от броя монети по 1 стотинка на Ани. Ако Ани изхарчи 75% от парите си, ще й остане сума, равна на сумата на Борис. Колко монети по 1 стотинка има Борис?

Решение: Тъй като 40% представлява $\frac{2}{5}$, то броят монети по 1 стотинка на Ани е кратен на 5. **(1 т.)** Нека Ани има x монети по 10 ст. и $5y$ монети по 1 ст. (x и y са естествени числа). Сумата на Ани е $A = (10x + 5y)$ ст. **(1 т.)** Тогава Борис има $2y$ монети по 10 ст. и x монети по 1 ст. Общата му сума е $B = (20y + x)$ ст. **(1 т.)** От условието следва, че сумата на Борис е 25% от тази на Ани, т.е. $4B = A$. **(1 т.)** Тогава $80y + 4x = 10x + 5y$, откъдето $75y = 6x$ или $25y = 2x$. **(1 т.)** Дясната страна на последното равенство е четно число и следователно $y = 2k$ за някое цяло число k. Тогава $x = 25k$. Общият брой монети е $25k + 5.2k + 2.2k + 25k = 64k$ и тъй като $100 < 64k < 200$, то $k = 2$ или $k = 3$. **(1 т.)** И в двата случая условията на задачата са изпълнени. И така, за монетите по 1 ст. на Борис получаваме два възможни отговора: $x = 25.2 = 50$ или $x = 25.3 = 75$. **(1 т.)**

Задача 3. Докажете, че:

а) числата $1 + 3^2 + 3^4$ и $1 + 3^2 + 3^4 + 3^6$ са взаимно прости;

б) сумата $1 + 3^2 + 3^4 + \ldots + 3^{42} + 3^{44} + 3^{46}$ се дели на числото 533.

Решение: а) Тъй като $1 + 3^2 + 3^4 = 91 = 7.13$ и

$$1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 = \left(1 + 3^2\right) + 3^4\left(1 + 3^2\right) = 10.\left(1 + 3^4\right) = 2^2.5.41,$$

числата нямат общ делител и следователно са взаимно прости. **(2 т.)**

б) Сумата групираме по два начина. Най-напред по тройки: **(2 т.)**

$$1+3^2+3^4+\ .\ .\ .\ +3^{42}+3^{44}+3^{46}=$$
$$=\left(1+3^2+3^4\right)+3^6\left(1+3^2+3^4\right)+\ .\ .\ .\ +3^{42}\left(1+3^2+3^4\right)=$$
$$=\left(1+3^2+3^4\right)\left(1+3^6+\ .\ .\ .\ +3^{42}\right)=$$
$$=13.7.\left(1+3^6+\ .\ .\ .\ +3^{42}\right)$$

След това по четворки: **(2 т.)**

$$1+3^2+3^4+\ .\ .\ .\ +3^{42}+3^{44}+3^{46}=$$
$$=\left(1+3^2+3^4+3^6\right)+3^8\left(1+3^2+3^4+3^6\right)+\ .\ .\ .\ +3^{40}\left(1+3^2+3^4+3^6\right)=$$
$$=\left(1+3^2+3^4+3^6\right)\left(1+3^8+\ .\ .\ .\ +3^{40}\right)=$$
$$=41.20.\left(1+3^8+\ .\ .\ .\ +3^{40}\right)$$

Разлагаме на прости множители $533=41.13$. От двете представяния следва, че сумата $1+3^2+3^4+\ .\ .\ .\ +3^{42}+3^{44}+3^{46}$ се дели на 13 и на 41. Но числата 13 и 41 са взаимно прости. Следователно сумата се дели и на тяхното произведение, т.е. на 533. **(1 т.)**

Задачите са предложени, както следва:
зад. 6.1 и зад. 6.3 – Ирина Шаркова, зад. 6.2 – Ивайло Кортезов