Задача 12.1. Да се реши неравенството

$$2^{2ax+1} + 2^a \leq 2^{ax} + 2^{ax+a+1},$$

където a е реален параметър.

Решение. След полагане $2^{ax} = y > 0$, получаваме неравенството

$$2y^2 - (2^{a+1} + 1)y + 2^a \leq 0$$

с решение $y \in [\frac{1}{2}; 2^a]$ при $a \geq -1$ и $y \in [2^a; \frac{1}{2}]$ при $a < -1$.

Следователно:

1. При $a < -1$ имаме $2^a \leq 2^{ax} \leq 2^{-1}$, т.е. $a \leq ax \leq -1$, откъдето $1 \geq x \geq -\frac{1}{a}$.
2. При $a = -1$ имаме $2^{-x} = 2^{-1}$, т.е. $x = 1$.
3. При $-1 < a < 0$ имаме $2^{-1} \leq 2^{ax} \leq 2^a$, т.е. $-1 \leq ax \leq a$, откъдето $-\frac{1}{a} \geq x \geq 1$.
4. При $a = 0$ всяко x е решение.
5. При $a > 0$ имаме $2^{-1} \leq 2^{ax} \leq 2^a$, т.е. $-1 \leq ax \leq a$, откъдето $-\frac{1}{a} \leq x \leq 1$.

Оценяване. 1 т. за полагането; 1 т. за намиране на корените на съответното квадратно уравнение; 1 т. за определяне на решенията на неравенството в зависимост от a; 4 т. за довършнване на решението.

Задача 12.2. Нека $a_1 > 1$ и $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n} - 1$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

а) редицата (a_n) е сходяща и да се намери нейната граница;

б) съществува n, за което $a_{2n} < 1 + \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

Решение. а) Понеже $a_{n+1} - 1 = \dfrac{(a_n - 1)^2}{a_n} > 0$, то $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{a_n} - 1 < 0$ и значи $a_n > a_{n+1} > 1$. Следователно редицата е сходяща и за нейната граница l имаме, че $l = l + \dfrac{1}{l} - 1$, т.е. $l = 1$.

б) От а) следва, че $a_k \leq 3/2$ за някое k. Тогава от

$$a_{n+1} - 1 = \frac{(a_n - 1)^2}{a_n} < (a_n - 1)^2$$

по индукция получаваме, че $a_n - 1 < \dfrac{1}{2^{2^{n-k}}}$ при $n > k$. Остава да изберем $n \geq 2k$.

Оценяване. а) по 1 т. за $a_{n+1} > 1$, $a_n > a_{n+1}$ и $l = 1$; б) 1 т. за $a_{n+1} - 1 < (a_{n+1} - 1)^2$, 1 т. $a_n < (a_{n-k} - 1)^{2^{2^{n-k}}}$ и 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.3. Дени попълва с ненулево цяло число някой от коефициентите на уравнение от 2010-та степен, след това Вени попълва също с ненулево цяло число друг

от коефициентите и т.н., докато бъдат попълнени всичките 2011 коефициента. Дени печели, ако полученото уравнение има целочислен корен, а в противен случай печели Вени. Коя от двете има печеливша стратегия?

Решение. Дени. Тя може да попълва така, че след всяко нейно попълване (без предпоследното) броят на непопълнените коефициенти пред нечетните и пред четните степени да е един и същ. Значи преди предпоследния ѝ ход има само един непопълнен коефициент от едната група, например групата A. Тя го попълва така, че сумата на числата в A да стане ненулева. С последното си попълване Дени може да направи така, че полученото уравнение да има корен 1 или -1. Наистина, в противен случай сумата от всички коефициенти без последния, който трябва да се попълни, например b, би била 0 (това означава, че 1 не може да е корен на уравнението). Също така, разликата на сумите от числата в A и числата в другата група B без самото b също би била 0 (понеже -1 не е корен на уравнението съгласно допускането). Оттук следва, че както сумата на числата в $B \setminus \{b\}$, така и тази на числата в A е 0. Последното вече е противоречие.

Оценяване. 3 т. за стратегията три хода преди края да има само един непопълнен коефициент от едната група и 4 т. за довършване на решението; 1 т. само за твърдение, че има стратегия, при която 1 или -1 е корен на полученото уравнение.

Задача 12.4. В пространството са дадени правоъгълен $\triangle ABC$ с хипотенуза AB и равнина τ. Нека $\alpha = \angle(AC, \tau)$, $\beta = \angle(BC, \tau)$ и $\varphi = \angle(ABC, \tau)$.

а) Да се докаже, че $\sin^2\varphi = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$.

б) Ако $\alpha + \beta = 60^\circ$, да се намери най-малката стойност на φ.

Решение. а) Движейки успоредно τ, можем да предполагаме, че $C \notin \tau$. Ако например $BC || \tau$, то $\beta = 0$ и $\varphi = \alpha$. Иначе можем да считаме, че $AC \cap \tau = A_1$ и $BC \cap \tau = B_1$. Нека C_1 и C_2 са ортогоналните проекции на C съответно върху A_1B_1 и τ. Тогава $\alpha = \angle CA_1C_2$, $\beta = \angle CB_1C_2$ и $\varphi = \angle CC_1C_2$. Ако $x = \angle CAC_1$ и $y = \angle CBC_1$, то

$$\sin\alpha = \frac{CC_2}{CA_1} = \frac{CC_2}{CC_1}\sin x,\ \sin\beta = \frac{CC_2}{CB_1} = \frac{CC_2}{CC_1}\sin y,\ \sin\varphi = \frac{CC_2}{CC_1}$$

и понеже $x + y = 90^\circ$, следва, че $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\varphi$.

б) Имаме, че

$$\sin^2\varphi = \sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1 - \frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2} =$$

$$1 - \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = 1 - \frac{\cos(\alpha-\beta)}{2} \geq \frac{1}{2}.$$

Значи $\sin\varphi \geq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и понеже $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$, то най-малката стойност на φ е равна на 45° и се достига при $\alpha = \beta = 30^\circ$.

Оценяване. а) 1 т. за построяване на ъглите и 2 т. за останалата част; б) 4 т., от които по 1 т. за всяка от двете тригонометрични формули; при аналитичен подход по 1 т. за намиране на производната и на корените ѝ, и 2 т. за намиране на минимума.

Задача 12.5. Могат ли четири различни реални числа, които са измежду нулите на полином от трета степен и неговата производна, да образуват аритметична прогресия?

Първо решение. Не. Да допуснем противното за полинома $P(x) = x^3 - ax^2 + bx - c = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ и прозводната му $P'(x) = 3x^2 - 2ax + b = 3(x - y_1)(x - y_2)$. Можем да считаме, че $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3$ (защо?).

Нека y_1, x_2 и y_2 са членове на прогресията. Понеже $2a/3 = y_1 + y_2 = 2x_2$ и $x_1 + x_2 + x_3 = a$ и някое от числата x_1 и x_3 също е член на прогресията, то лесно се съобразява, че и петте числа x_1, y_1, x_2, y_2, x_3 образуват прогресия. Тогава

$$3y_1y_2 = b = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{(y_1 + y_2)^2}{2} + \frac{(3y_1 - y_2)(3y_2 - y_1)}{4},$$

откъдето $(y_1 - y_2)^2 = 0$, противоречие.

Нека x_2 не е член на прогресията. Тогава числата x_1, y_1, y_2, x_3 образуват прогресия, т.е. $x_1 = 2y_1 - y_2$ и $x_3 = 2y_2 - y_1$. Понеже

$$3b - 8a^2/9 = y_1y_2 - 2(y_1 + y_2)^2 = x_1x_3 = b - (x_1 + x_3)x_2 = b - 2a^2/9,$$

следва, че $b = a^2/3$. Тъй като $x_2 = a/3$, от $P(a/3) = 0$ намираме, че $c = a^2/27$, откъдето $P(x) = (x - a/3)^3$, противоречие.

Нека сега y_1 не е член на прогресията. Тогава $x_1 = y_2 - d$, $x_2 = y_2 - d$, $x_3 = y_2 + d$ и от формулите на Виет следва, че $a = 3y_1 - 2d$ и $b = 3y^2 - 4yd - d^2$. Като заместим в $3y_1^2 - 2ay_1 + b = 0$, получаваме $d^2 = 0$, противоречие. Случаят, когато y_2 не е член на прогресията, е аналогичен.

Второ решение. (К. Чакърян) Ще използваме формулата

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2}\frac{1}{x - x_3}.$$

Нека x_1, y_1, x_2 образуват прогресия. Тогава

$$0 = \frac{1}{y_1 - x_1} + \frac{1}{y_1 - x_2} + \frac{1}{y_1 - x_3} = \frac{1}{y_1 - x_3},$$

противоречие. Случаят, когато x_2, y_2, x_3 образуват прогресия, е аналогичен.

Остава случаят, когато x_1, y_1, y_2, x_3 образуват прогресия. Тогава $x_3 - y_1 = 2(y_1 - x_1)$, откъдето

$$0 = \frac{1}{y_1 - x_1} + \frac{1}{y_1 - x_2} + \frac{1}{y_1 - x_3} = \frac{1}{y_1 - x_2} - \frac{1}{y_1 - x_3},$$

т.е. $x_2 = x_3$, което отново е противоречие.

Оценяване. Първо решение: по 2 т. за първите два случая и 3 т. за третия случай. Второ решение: 4 т. за първия и аналогичния му случай, и 3 т. за втория случай.

Задача 12.6. Нека $f(x)$ е полином с цели коефициенти и n е дадено естествено число. Известно е, че за всеки две цели числа a и b, за които $a - b$ се дели на n, числата $f(a)$ и $f(b)$ не са взаимно прости. Да се докаже, че съществува просто число p, за което p дели $f(x)$ за всяко цяло число x.

Решение. Да допуснем, че просто число със свойството от условието не съществува. Първо ще докажем, че за произволни прости числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ съществува цяло число b, за което $f(b)$ не се дели на p_i за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$.

Наистина, от допускането следва, че за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$ съществува x_i, за което $f(x_i)$ не се дели на p_i. Според китайската теорема за остатъците съществува число $b \equiv x_i \pmod{p_i}$ и тогава $f(b) \equiv f(x_i) \not\equiv 0 \pmod{p_i}$.

Нека $p_1, p_2, \ldots, p_k$ са простите делители на n. Според доканото свойство съществува число b, за което $f(b)$ не се дели на p_i за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$. Нека $q_1, q_2, \ldots q_l$ са простите делители на $f(b)$. Отново от доказаното свойство следва, че съществува c за което $f(c)$ не се дели на никое от числата $q_1, q_2, \ldots q_l$. Тъй като $q_1 q_2 \ldots q_l$ е взаимно просто с n, то сравнението $q_1 q_2 \ldots q_l x \equiv b - c \pmod{n}$ има решение. Тогава, ако $a = q_1 q_2 \ldots q_l x + c$, то $a \equiv b \pmod{n}$ и $f(a) \equiv f(c) \not\equiv 0 \pmod{q_i}$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, l$. Това означава, че $f(a)$ и $f(b)$ са взаимно прости, което е противоречие с условието.

Следователно съществува просто число p, за което p дели $f(x)$ за всяко цяло число x.

Оценяване. 3 т. за доказване, че за произволни прости числа $p_1, p_2, \ldots, p_k$ съществува цяло число b, за което $f(b)$ не се дели на p_i за всяко $i = 1, 2, \ldots, k$; 3 т. за намиране на числото c от решението; 1 т. за довършване на решението.

Задачите са предложени от: Емил Колев – 12.1, Николай Николов – 12.2, 12.3, 12.4, 12.5, Олег Мушкаров - 12.4, Александър Иванов – 12.6.