ПЛОВДИВСКИ УНИВЕРСИТЕТ "ПАИСИЙ ХИЛЕНДАРСКИ"

КОНКУРСЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА
12 юли 2006 г.

Тема 2

Задача 1. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{l} 2\log_4 x = 1 + \log_4(-xy) \\ 2y^2 + 4y + x - 8 = 0\,. \end{array} \right.$$

Задача 2. Да се определи множеството M от стойности на реалния параметър a, за които корените x_1 и x_2 на квадратното уравнение $x^2 - 2(a+1)x + 2a^2 - 2a - 4 = 0$ са реални. Да се намерят най-малката и най-голямата стойност на функцията $f(a) = \frac{1}{4}(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2)$ при $a \in M$.

Задача 3. Да се реши неравенството

$$(\sqrt{5}+2)^{\frac{x^2-6}{x-1}} \leq (\sqrt{5}-2)^{-x}.$$

Задача 4. Да се реши уравнението

$$\cos x - \sin x = 1 - \sin 2x.$$

Задача 5. Да се реши неравенството

$$|x^2 - 6x + 5| + 1 - x \leq 0\,.$$

Задача 6. В остроъгълния триъгълник ABC са дадени страната $AC = 25$, медианата $AM = 20$ и отсечката $AH = 7$, където H е петата на височината от върха C. Да се намерят дължините на страните AB и BC и да се докаже, че $\measuredangle AMH = \measuredangle ACH$.

Задача 7. Дадена е пирамида $ABCM$ с основа $\triangle ABC$, в който $AB = 6$ и $BC = 10$. Околната стена BCM е перпендикулярна на основата, а околните ръбове AM, BM и CM са равни и имат дължина 13. Да се намерят обемът на пирамидата и тангенсът на ъгъла между околната стена ABM и равнината на основата.

Задача 8. Даден е успоредник $ABCD$ с диагонали $AC = 14$ и $BD = \sqrt{76}$. Ъглополовящата на $\measuredangle ABC$ пресича страната CD и продължението на страната AD съответно в точки M и N. Да се намери лицето на $\triangle DMN$ при условие, че около четириъгълника $ABMD$ може да се опише окръжност.

Време за работа — 4 астрономически часа. Всяка напълно решена задача се оценява с 5 точки. Оценката на писмената работа се получава по формулата $2 + 0,1.N$, където N е броят на получените точки.

Пожелаваме Ви успешно представяне!