Софийски Университет „Св. Климент Охридски"
Писмен конкурсен изпит по математика
28март 2010 г.

ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 3

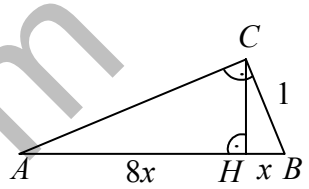
Задача 1. Да се пресметне стойността на израза $\dfrac{1-\cos^4 x-\sin^4 x}{1-\cos^2 2x}$.

Решение: При $x \neq k\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, $1-\cos^2 2x \neq 0$ и преобразуваме израза по следния начин:

$$\frac{1-\cos^4 x-\sin^4 x}{1-\cos^2 2x}=\frac{1-\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2+2\sin^2 x.\cos^2 x}{\sin^2 2x}=\frac{1-1+2\sin^2 x.\cos^2 x}{4\sin^2 x.\cos^2 x}=\frac{2\sin^2 x.\cos^2 x}{4\sin^2 x.\cos^2 x}=\frac{1}{2}.$$

Задача 2. В правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB, $CH \perp AB\,(H \in AB)$ и $AH : HB = 8:1$. Да се намери периметърът на триъгълника, ако дължината на по-малкия катет е 1.

Решение: Нека $AH = 8x,\ HB = x, AB = 9x$. От $AC^2 = AH.AB = 72x^2$ и $BC^2 = BH.BA = 9x^2$ следва, че $AC > BC$. Тогава $BC = 1$ и $1^2 = 9x^2$. Оттук намираме $x = \frac{1}{3}$, $AB = 9x = 3$, $AC = 6\sqrt{2}x = 2\sqrt{2}$. Следователно $AB + BC + CA = 4 + 2\sqrt{2}$.

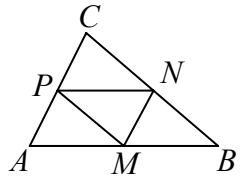


Задача 3. Да се реши неравенството $x-1 \leq \dfrac{x-1}{x^2-8x+16}$.

Решение: Неравенството е еквивалентно на $(x-1)\left(1-\dfrac{1}{x^2-8x+16}\right) \leq 0$. Като приведем под общ знаменател и разложим на множители, получаваме $\dfrac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(x-4)^2} \leq 0$. Множеството от допустимите стойности е $x \neq 4$. При $x \neq 4$ неравенството е еквивалентно на $(x-1)(x-3)(x-5) \leq 0$, което има решения $x \in (-\infty;1] \cup [3;5]$. Окончателно получаваме $x \in (-\infty;1] \cup [3;4) \cup (4,5]$.

Задача 4. Върху страните *AB*, *BC* и *CA* на триъгълника *ABC* са избрани съответно точки *M*, *N* и *P*, така че $PN \parallel AB$, $NM \parallel CA$ и $MP \parallel BC$. Да се намери лицето на *ABC*, ако лицето на *MNP* е $\frac{3}{4}$.

Решение: От $PN \parallel AB$ и $NM \parallel CA$ следва, че $PAMN$ е успоредник и $PN = AM$. От $PN \parallel AB$ и $MP \parallel BC$ следва, че $PMBN$ е успоредник и $PN = MB$. Следователно $AM = MB$, т.е. M е средата на *AB*. Аналогично получаваме, че *N* и *P* са средите съответно на *BC* и *CA*. Тогава $S_{ABC} = 4S_{MNP} = 3$.

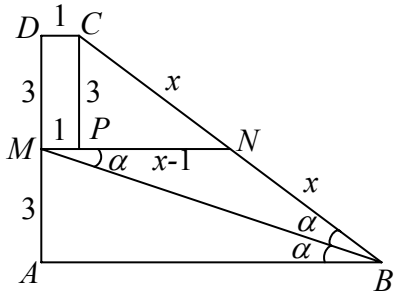


Задача 5. Да се реши неравенството $x-3-\sqrt{3x-5} \leq 0$.

Решение: Множеството от допустимите стойности е $x \geq \dfrac{5}{3}$. Записваме неравенството във вида $x-3 \leq \sqrt{3x-5}$, което е изпълнено за всяко $x \in \left[\frac{5}{3};3\right]$. При $x > 3$ повдигаме на квадрат, откъдето $x^2-9x+14 \leq 0$. Решение на последното неравенство е $x \in [2;7]$. Окончателно $x \in \left[\frac{5}{3};7\right]$.

Задача 6. Даден е правоъгълен трапец $ABCD\,(AB \parallel CD, AB > CD)$ с прав ъгъл при върха A. Ъглополовящата на $\sphericalangle ABC$ пресича бедрото *AD* в средата му *M*. Да се намери лицето на трапеца, ако $AD = 6$ и $CD = 1$.

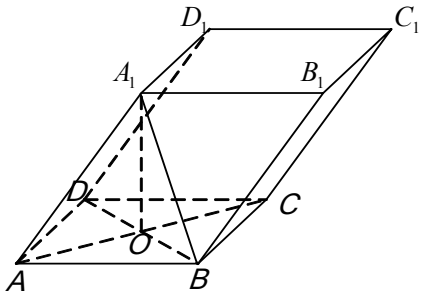
Решение: Нека *MN* е средната основа на трапеца. От $MN \parallel AB$ и $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MBC$ следва, че $\sphericalangle BMN = \sphericalangle MBN$. Тогава $MN = BN = NC = x$. Нека $CP \perp MN, P \in MN$. Тогава $MPCN$ е



math-bg.com

правоъгълник, откъдето $MP = CD = 1$, $PC = MD = 3$ и $PN = x - 1$. От правоъгълния ΔCPN намираме $x^2 = (x-1)^2 + 3^2$, т.е. $x = 5 = MN$. Оттук $S_{ABCD} = MN.AD = 30$.

Задача 7. Основата на четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е квадрат $ABCD$ със страна $\sqrt{2}$. Ръбът AA_1 образува с ръбовете AB и AD ъгли с големина 60°. Да се намери обемът на призмата, ако ортогоналната проекция на върха A_1 върху равнината на основата лежи на отсечката BD.

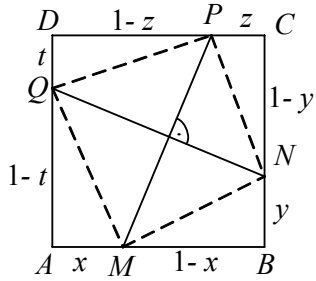


Решение: Нека O е ортогоналната проекция на върха A_1 върху равнината на основата. От $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle DAA_1 = 60^\circ$ и $AB = AD$ следва, че $\triangle ABA_1 \cong \triangle ADA_1$ и $A_1B = A_1D$. Тъй като O лежи на BD и $A_1O \perp AD$, то $\triangle OBA_1 \cong \triangle ODA_1$ и $OB = OD$, откъдето $O = AC \cap BD$. От $OA = OB \Rightarrow AA_1 = A_1B$. Тъй като $\sphericalangle BAA_1 = 60^\circ$, то $\triangle ABA_1$ е равностранен и $AA_1 = AB = \sqrt{2}$. От $\triangle AOA_1$ имаме $OA_1^2 = AA_1^2 - AO^2 = 2 - 1 = 1$. Оттук $V = S_{ABCD}OA_1 = 2.1 = 2$.

Задача 8. Да се намерят реалните числа a и b, ако е известно, че уравнението $x^2 + ax + b = 0$ има реални корени x_1, x_2, такива че $5x_1^2 + 5x_2^2 = 4a - 6b - 1$.

Решение: Тъй като уравнението $x^2 + ax + b = 0$ има реални корени, то, $D = a^2 - 4b \geq 0$. По формулите на Виет намираме $5x_1^2 + 5x_2^2 = 5(x_1 + x_2)^2 - 10x_1x_2 = 5a^2 - 10b$. Оттук $5a^2 - 10b = 4a - 6b - 1$ или $5a^2 - 4a + 1 = 4b$. Но $4b \leq a^2$, така че $5a^2 - 4a + 1 \leq a^2$, т.е. $(2a-1)^2 \leq 0$. Следователно $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{16}$. При $a = \frac{1}{2}$ и $b = \frac{1}{16}$ уравнението $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$ има корени $x_1 = x_2 = -\frac{1}{4}$, за които $5x_1^2 + 5x_2^2 = \frac{5}{8} = 4.\frac{1}{2} - 6.\frac{1}{16} - 1$.

Задача 9. Даден е квадрат $ABCD$ със страна 1. Точките M, N, P и Q съответно върху страните AB, BC, CD и DA са такива, че $MP \perp NQ$. Да се намери $QA + AM + NC + CP$.



Решение: Означаваме $AM = x$, $BM = 1 - x$, $BN = y$, $CN = 1 - y$, $CP = z$, $DP = 1 - z$, $DQ = t$ и $AQ = 1 - t$. Тъй като $MNPQ$ е четириъгълник с перпендикулярни диагонали, то $MN^2 + PQ^2 = NP^2 + QM^2$. Оттук

s $y^2 + (1-x)^2 + t^2 + (1-z)^2 = z^2 + (1-y)^2 + x^2 + (1-t)^2$ или $x + z = y + t$.

Тогава $1 - x + 1 - z = 1 - y + 1 - t$. Оттук получаваме

$x + (1-t) + z + (1-y) = y + (1-x) + t + (1-z)$, т.е.

$QA + AM + NC + CP = BN + BM + DQ + DP$.

Тъй като $QA + AM + NC + CP + BN + BM + DQ + DP = 4$, то $QA + AM + NC + CP = 2$.

Задача 10. Нека a, b и c са реални числа, такива че множеството от решенията на системата $\begin{cases} ax^4 < bx^2 + c \\ bx^4 < cx^2 + a \\ cx^4 < ax^2 + b \end{cases}$, съдържа точно три цели числа. Да се докаже, че a, b и c са страни на триъгълник.

Решение: Ако цялото число x_0 е решение на системата, то и $-x_0$ е решение. Тогава 0 е решение на системата, защото броят на целите решения е нечетен. Оттук получаваме, че $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$. Ако x е решение на системата, то x е решение на неравенството $(a+b+c)(x^4 - x^2 - 1) < 0$. Тъй като $a + b + c > 0$, решения му са $x \in \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}; \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)$, откъдето намираме, че целите решения на системата са –1, 0 и 1. Тогава $a < b + c$, $b < c + a$ и $c < a + b$, откъдето следва, че a, b и c са страни на триъгълник.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата 2 + 0,1.N, където N е броят на получените точки.

math-bg.com