СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

5 декември 2009 г.

Тема за 10., 11., 12. клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 6 има 4 отговора, само един от които е верен. Решенията на задачи 7 и 8 трябва да бъдат подробно обяснени. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 6 се присъждат по 3 точки. За вярно решение на всяка от задачи 7 и 8 се присъждат по 6 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev09/.

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Броят на стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $|x-1|+|x-3| = |x|+|x-a|$ има безбройно много решения, е равен на:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

2. Бедрата на равнобедрен трапец имат дължина 1 и са оцветени в червено, а основите имат дължини 2 и 3. Точка от вътрешността на трапеца оцветяваме в червено, ако някоя от най-близките ѝ точки от периферията на трапеца е червена. Лицето на червената част от трапеца, разделено на $\sqrt{3}$, е равно на:

А) $\frac{1}{6}$; **Б)** $\frac{1}{4}$; **В)** $\frac{1}{3}$; **Г)** $\frac{1}{2}$.

3. Броят на стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $x^2 - a = |x-a|$ има най-много едно решение, е равен на:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

4. Броят на естествените числа n, двоичният запис на които съвпада с троичния запис на $3n$, е равен на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

5. Ако $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то сумата от първите три цифри в десетичния запис на числото $a + a^3 + a^5 + a^7 + a^9 + a^{11}$ е равна на:

А) 16; **Б)** 17; **В)** 18; **Г)** 19.

6. Трима играят на карти, като имат равни шансове да спечелят всяка ръка. Вероятността тримата да имат по три ръце след деветата ръка е записана във вида $\frac{m}{3^n}$, където m е естествено число, което не се дели на 3. Числото n е равно на:

А) 6; **Б)** 7; **В)** 8; **Г)** 9.

Задача 7. Точка D от вътрешността на равнобедрен правоъгълен $\triangle ABC$ с хипотенуза AB е такава, че $AD = \sqrt{3}$, $BD = 1$ и $CD = \sqrt{2}$. Да се намери $\sphericalangle ADC$.

Задача 8. Нека $a_0 = 1$ и $a_n = a_{[n/2]} + 2a_{[n/4]}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ ($[x]$ е цялата част на числото x). Да се намери най-големият прост делител на a_{2009^2}.

math-bg.com

Иван Салабашев 2009

Решения на задачите от темата за 10.-11.-12. клас

1. Броят на стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $|x-1|+|x-3| = |x|+|x-a|$ има безбройно много решения, е равен на:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

Отговор: В. Лявата страна е равна на $\begin{cases} 2x-4, & x>3, \\ 2, & 1\le x\le 3 \\ -2x+4, & x<1 \end{cases}$, а дясната на $\begin{cases} 2x-a, & x>M, \\ |a|, & m\le x\le M \\ -2x+a, & x<m \end{cases}$, където $m=\min\{0,a\}$ и $M=\max\{0,a\}$. Те съвпадат в някой интервал само при $a=4$ и при $|a|=2$, $a>1$, т.е. $a=2$.

2. Бедрата на равнобедрен трапец имат дължина 1 и са оцветени в червено, а основите имат дължини 2 и 3. Точка от вътрешността на трапеца оцветяваме в червено, ако някоя от най-близките ѝ точки от периферията на трапеца е червена. Лицето на червената част от трапеца, разделено на $\sqrt{3}$, е равно на:

А) $\frac{1}{6}$; **Б)** $\frac{1}{4}$; **В)** $\frac{1}{3}$; **Г)** $\frac{1}{2}$.

Отговор: Б. Нека трапецът е $ABCD$ ($AB=3$) и D_1 е проекцията на D върху AB. Тогава $AD_1=\frac{1}{2}$ и понеже $AD=1$, то $\sphericalangle A=60^\circ$. Нека ъглополовящите на $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle D$ се пресичат в точка E, а тези на $\sphericalangle B$ и $\sphericalangle C$ в точка F. Тъй като $\sphericalangle D_1DE=30^\circ<45^\circ$, то еднаквите триъгълници ADE и BCF не се пресичат и образуват червената част. Понеже $\sphericalangle ADE=60^\circ$, $\sphericalangle DAE=30^\circ$ и $AD=1$, то "червеното" лице е равно на $2S_{ADE}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

3. Броят на стойностите на реалния параметър a, за които уравнението $x^2-a=|x-a|$ има най-много едно решение, е равен на:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

Отговор: А. Нека $f(x)=x^2-a-|x-a|$. Ако $a\le 0$, то $f(0)=f(1)=0$. При $a>0$ имаме, че $f(\pm\sqrt{a})\le 0$ значи уравнението $f(x)=0$ има решение във всеки от интервалите $(-\infty,-\sqrt{a})$ и $(\sqrt{a},+\infty)$.

4. Броят на естествените числа n, двоичният запис на които съвпада с троичния запис на $3n$, е равен на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

Отговор: Б. Нека $n=a_0+a_12+\dots+a_{k-1}2^{k-1}+2^k$ е двоичният запис на n. Тогава $3n=a_0+a_13+\dots+a_{k-1}3^{k-1}+3^k$, откъдето $a_0=0$. От равенствата за n и $3n$ следва, че $3^{k-1}-2^k+a_{k-1}(3^{k-2}-2^{k-1})+\dots+a_3=a_2+a_1$. Понеже $3^{k-1}-2^k\ge 11$ при $k\ge 4$, а $2\ge a_2+a_1$, то $k=3$ и $a_3=a_2+a_1$. Оттук $a_3=1$ и $a_2=0, a_1=1$ или $a_2=1, a_1=0$, т.е. $n=\overline{1010}_{(2)}=10$ или $n=\overline{1100}_{(2)}=12$.

5. Ако $a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, то сумата от първите три цифри в десетичния запис на числото $a+a^3+a^5+a^7+a^9+a^{11}$ е равна на:

math-bg.com

А) 16; **Б)** 17; **В)** 18; **Г)** 19.

Отговор: В. Дадената сума s е равна на $a\frac{1-a^{12}}{1-a^2} = 1 - a^{12}$. Понеже $a < \frac{2}{3}$, то $a^6 < \frac{2^6}{3^6} < \frac{1}{10}$ и значи $a^{12} < \frac{1}{100}$, т.е. $s = 0,99\ldots$.

6. Трима играят на карти, като имат равни шансове да спечелят всяка ръка. Вероятността тримата да имат по три ръце след деветата ръка е записана във вида $\dfrac{m}{3^n}$, където m е естествено число, което не се дели на 3. Числото n е равно на:

А) 6; **Б)** 7; **В)** 8; **Г)** 9.

Отговор: В. Вероятността един от играчите да е взел три ръце е равна на $a = \binom{9}{3}(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^6$ и ако това е станало, вероятността друг да е взел три ръце е равна на $b = \binom{6}{3}(\frac{1}{2})^6$. Следователно $\frac{m}{3^n} = ab = \frac{\binom{9}{3}\binom{6}{3}}{3^9} = \frac{560}{3^8}$.

Задача 7. Точка D от вътрешността на равнобедрен правоъгълен $\triangle ABC$ с хипотенуза AB е такава, че $AD = \sqrt{3}$, $BD = 1$ и $CD = \sqrt{2}$. Да се намери $\sphericalangle ADC$.

Решение. Нека E е образът на D при ротация около C на ъгъл $90°$ по посока на часовниковата стрелка. Тогава DE е хипотенуза в равнобедрения правоъгълен $\triangle EDC$. Следователно в $\triangle DEA$ имаме, че $DE = \sqrt{2}DC = 2$, $AE = BD = 1$ ($\triangle BCD \cong \triangle ACE$) и $AC = \sqrt{3}$. Оттук $\sphericalangle EAD = 90°$ и $\sphericalangle ADE = 30°$. Тогава $\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADE + \sphericalangle CDE = 30° + 45° = 75°$.

Оценяване. 2 т. за въвеждане на точката E.

Задача 8. Нека $a_0 = 1$ и $a_n = a_{[n/2]} + 2a_{[n/4]}$ за всяко $n \in \mathbb{N}$ ($[x]$ е цялата част на числото x). Да се намери най-големият прост делител на a_{2009^2}.

Решение. Последователно намираме $a_1 = 3$ и $a_2 = a_3 = 5$. Ако $k \geq 2$ и $2^k \leq n < 2^{k+1}$, то $2^{k-2} \leq [n/4] < 2^{k-1} \leq [n/2] < 2^{k-1}$. Тогава по индукция следва, че $a_n = a_{2^k} = b_k$. Имаме, че $b_{k+2} = b_{k+1} + 2b_k$. Характеристичното уравнение $x^2 = x + 2$ на тази линейна рекурентна редица има корени -1 и 2. Следователно $a_{2^k} = b_k = c(-1)^k + d2^k$. Понеже $a_1 = 3$ и $a_2 = 5$, получаваме, че $a_{2^k} = \frac{(-1)^k + 2^{k+3}}{3}$ (което може да се докаже и по индукция). Тъй като $2^{10}\sqrt{2} < 2009 < 2^{11}$, то $2^{21} < 2009^2 < 2^{22}$ и значи

$$a_{2009^2} = a_{2^{21}} = \frac{2^{24} - 1}{3} =$$

$$\frac{(2^{12} - 1)(2^{12} + 1)}{3} = \frac{(2^6 - 1)(2^6 + 1)(2^4 + 1)(4^4 - 2^2 + 1)}{3} = 3.5.7.13.17.241.$$

Следователно търсеното число е равно на 241.

Оценяване. 2 т. за $a_n = a_{2^k}$, 4 т. за общия вид на a_{2^k}, 1 т. за a_{2009^2} и 1 т. за отговора.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.

math-bg.com