СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

1 декември 2007 г.

Тема за 7 клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 10 има 4 отговора, само един от които е верен. Отговорът на всяка от задачите от 11 до 15 е число. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 5 се присъжда по 1 точка. За верен отговор на всяка от задачите от 6 до 10 се присъждат по 2 точки. За верен отговор на всяка от задачите от 11 до 15 се присъждат по 3 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev07/.

Журито Ви пожелава приятна работа.

1. Кое от посочените числа е решение на уравнението $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{5} = \frac{4x}{3}$?

А) $\frac{2}{3}$; **Б)** $-\frac{2}{3}$; **В)** $-\frac{21}{31}$; **Г)** $\frac{21}{31}$.

2. Най-малкото цяло число, което е решение на неравенството $\frac{x-4}{3} + \frac{x-1}{4} \geq \frac{x}{7}$, е:

А) -4; **Б)** 4; **В)** 3; **Г)** -1.

3. Сумата от коефициентите пред x^3 и x^4 в нормалния вид на полинома $(x-1)^4 + x^3(x+1)^3$ е:

А) 0; **Б)** -3; **В)** -4; **Г)** 1.

4. Цената на една стока била увеличена с 20%, а след месец с още 30% и станала 156 лв. Каква е била цената преди първото увеличение?

А) 99; **Б)** 100; **В)** 101; **Г)** 110.

5. Два от ъглите на триъгълник се отнасят както 5 : 6, а разликата им е 11°. Тогава средният по големина ъгъл на този триъгълник е:

А) 57°; **Б)** 58°; **В)** 59°; **Г)** 60°.

6. Точките $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ са разположени върху една права в посочения ред, като $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 3$, $A_2A_3 = 5$ и т.н. (т.е. $A_iA_{i+1} = 2i+1$). Тогава дължината на отсечката A_7A_{16} е:

А) 207; **Б)** 208; **В)** 209; **Г)** 210.

7. A, B, C и D получили общо 2007 ореха, като B получил един орех повече от A, C получил един орех повече от B, а D получил два ореха повече от C. Колко ореха общо са получили A и D?

А) 1001; **Б)** 1002; **В)** 1003; **Г)** 1004.

8. Билет за кино за възрастен е 5.50 лв, а билет за ученик е 3.50 лв. За една прожекция били продадени билети за 100 лв. и се оказало, че броят на посетителите се дели на 3. Какъв е броят на учениците?

А) 1; **Б)** 8; **В)** 15; **Г)** 16.

9. На колко нули завършва числото

$$2^{13}.3.5.7.9\ldots.97.99?$$

А) 10; **Б)** 11; **В)** 12; **Г)** 13.

10. Клас от 25 ученика направил контролно от две задачи. Първата задача решили 18 ученика, а втората – 12 ученика. Колко най-малко работи трябва да провери учителят, за да е сигурен, че ще напише поне една шестица? (Шестица се пише само за две решени задачи.)

А) 18; **Б)** 12; **В)** 21; **Г)** 24.

11. Да се намери най-малката стойност на израза $4a^2 + 12ab + 18b^2 - 6b + 12$.

math.bg.com

12. Да се намери най-малкото петцифрено число, което се дели на 89, първите му две цифри са еднакви и последните му две цифри също са еднакви.

13. Един работник може да свърши сам дадена работа за 12 дни, а втори може да свърши сам същата работа за 15 дни. След като двамата работили заедно един ден, към тях се присъединил трети работник и тримата довършили работата след още 4 дни. За колко дни третият работник може да свърши сам цялата работа?

14. В триъгълник ABC ъглополовящите AA_1 и BB_1 ($A_1 \in BC$ и $B_1 \in AC$) се пресичат в точка O. Ако $\sphericalangle ACB + \sphericalangle AOB_1 = 110^\circ$, да се намери $\sphericalangle ACB$.

15. В един магазин продали някакъв брой чифтове обувки и се оказало, че ако разделим броя на продадените обувки на 3, 5 и 7, ще получим съответно остатъци 1, 2 и 4. Да се намери минималният възможен брой продадени обувки.

math-bg.com

Иван Салабашев 2007

Решения на задачите от темата за 7. клас

1. Кое от посочените числа е решение на уравнението $\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{5} = \frac{4x}{3}$?

А) $\frac{2}{3}$; **Б)** $-\frac{2}{3}$; **В)** $-\frac{21}{31}$; **Г)** $\frac{21}{31}$.

Отговор: В. Уравнението е еквивалентно последователно на $\frac{3x-7}{10} = \frac{4x}{3} \iff x = -\frac{21}{31}$.

2. Най-малкото цяло число, което е решение на неравенството $\frac{x-4}{3} + \frac{x-1}{4} \geq \frac{x}{7}$, е:

А) -4; **Б)** 4; **В)** 3; **Г)** -1.

Отговор: Б. Неравенството е еквивалентно последователно на $\frac{7x-19}{12} \geq \frac{x}{7} \iff 49x - 133 \geq 12x$, откъдето $x \geq \frac{133}{37} = 3\frac{22}{37}$. Следователно търсеното число е 4.

3. Сумата от коефициентите пред x^3 и x^4 в нормалния вид на полинома $(x-1)^4 + x^3(x+1)^3$ е:

А) 0; **Б)** -3; **В)** -4; **Г)** 1.

Отговор: Г. Тъй като нормалният вид е $x^6+3x^5+4x^4-3x^3+6x^2-4x+1$, търсената сума е $4+(-3) = 1$.

4. Цената на една стока била увеличена с 20%, а след месец с още 30% и станала 156 лв. Каква е била цената преди първото увеличение? **А)** 99; **Б)** 100; **В)** 101; **Г)** 110.

Отговор: Б. Ако първоначалната цена е x лв., то тя е $1.2x$ след първото увеличение и $1.3(1.2x) = 1.56x$ след второто увеличение. Следователно имаме $1.56x = 156$, откъдето $x = 100$.

5. Два от ъглите на триъгълник се отнасят както $5:6$, а разликата им е $11°$. Тогава средният по големина ъгъл на този триъгълник е: **А)** $57°$; **Б)** $58°$; **В)** $59°$; **Г)** $60°$.

Отговор: В. Ако двата ъгъла са $5x$ и $6x$, то $6x - 5x = 11$, откъдето $x = 11$. Тогава ъглите са $55°$, $66°$ и $180° - (55° + 66°) = 59°$ и средният по големина ъгъл е $59°$.

6. Точките $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_{20}$ са разположени върху една права в посочения ред, като $A_0A_1 = 1\text{cm}$, $A_1A_2 = 3\text{cm}$, $A_2A_3 = 5\text{cm}$ и т.н. (т.е. $A_iA_{i+1} = 2i+1$ cm). Тогава дължината на отсечката A_7A_{16} е:

А) 207cm; **Б)** 208cm; **В)** 209cm; **Г)** 210cm.

Отговор: А. Имаме $A_7A_{16} = A_7A_8 + A_8A_9 + \cdots + A_{15}A_{16} = 15 + 17 + \cdots + 31 = 4.46 + 23 = 207$.

7. A, B, C и D получили общо 2007 ореха, като B получил един орех повече от A, C получил един орех повече от B, а D получил два ореха повече от C. Колко ореха общо са получили A и D?

А) 1001; **Б)** 1002; **В)** 1003; **Г)** 1004.

Отговор: Г. Ако A е получил x ореха, то от условието следва, че B е получил $x+1$ ореха, C е получил $x+2$ ореха, а D е получил $x+4$ ореха. Следователно $2007 = x + (x+1) + (x+2) + (x+4) = 4x + 7$, откъдето $x = 500$. Тогава A и D са получили общо $x + (x+4) = 1004$ ореха.

8. Билет за кино за възрастен е 5.50 лв, а билет за ученик е 3.50 лв. За една прожекция били продадени билети за 100 лв. и се оказало, че броят на посетителите се дели на 3. Какъв е броят на учениците? **А)** 1; **Б)** 8; **В)** 15; **Г)** 16.

Отговор: Г. Ако броят на учениците е x, а броят на възрастните е y, то от условието следва, че $3.5x + 5.5y = 100 \iff 7x + 11y = 200$ и числото $x + y$ се дели на 3. Тъй като $x = 28 - y - \frac{4(y-1)}{7}$, заключаваме, че $y-1$ се дели на 7. От друга страна, $200 - 11y = 7x \geq 0$, откъдето $y \leq 18$. Следователно възможните стойности на y са 1, 8 и 15 и директна проверка показва, че търсеният брой е 16.

math-bg.com

9. На колко нули завършва числото $2^{13}.3.5.7.9\ldots.97.99$? **А)** 10; **Б)** 11; **В)** 12; **Г)** 13.

Отговор: В. Разглежданото число се дели на 2^{13} и 5^{12}, но не се дели на 2^{14} и 5^{13}. Следователно то се дели на 10^{12}, но не се дели на 10^{13} и завършва на 12 нули.

10. Клас от 25 ученика направил контролно от две задачи. Първата задача решили 18 ученика, а втората – 12 ученика. Колко най-малко работи трябва да провери учителят, за да е сигурен, че ще напише поне една шестица? (Шестица се пише само за две решени задачи.)

А) 18; **Б)** 12; **В)** 21; **Г)** 24.

Отговор: В. Най-малко $18+12-25=5$ ученика са решили и двете задачи. Следователно най-много $25-5=20$ ученика няма да получат шестица. Когато учителят провери $20+1=21$ работи, със сигурност ще напише шестица.

11. Да се намери най-малката стойност на израза $4a^2+12ab+18b^2-6b+12$.

Отговор: 11. Тъй като $4a^2+12ab+18b^2-6b+12=(2a+3b)^2+(3b-1)^2+11$, търсената минимална стойност е 11.

12. Да се намери най-малкото петцифрено число, което се дели на 89, първите му две цифри са еднакви и последните му две цифри също са еднакви.

Отговор: 44055. Ако $A=\overline{xxyzz}$ е търсеното число, то от представянето $A=11000x+100y+11z=11(1000x+y+z)+89y=11(21x+y+z)+89(11^2x+y)$ следва, че $21x+y+z$ се дели на 89. Следователно минималната възможна стойност на x е 4 и $21x+y+z=89$, т.е. $y+z=5$. От последното следва, че минималната възможна стойност на y е 0 и търсеното число е 44055.

13. Един работник може да свърши сам дадена работа за 12 дни, а втори може да свърши сам същата работа за 15 дни. След като двамата работили заедно един ден, към тях се присъединил трети работник и тримата довършили работата след още 4 дни. За колко дни третият работник може да свърши сам цялата работа?

Отговор: 16. Нека третият работник свършва сам дадената работа за x дни. През първия ден двамата са свършили $\frac{1}{12}+\frac{1}{15}=\frac{3}{20}$ от работата. След това за 4 дни е свършена $4\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{x}\right)$ от работата. Следователно $\frac{3}{20}+4\left(\frac{3}{20}+\frac{1}{x}\right)=1$, откъдето намираме $x=16$.

14. В триъгълник ABC ъглополовящите AA_1 и BB_1 ($A_1\in BC$ и $B_1\in AC$) се пресичат в точка O. Ако $\sphericalangle ACB+\sphericalangle AOB_1=110^\circ$, да се намери $\sphericalangle ACB$.

Отговор: 40°. Тъй като $\sphericalangle AOB=180^\circ-\sphericalangle BAO-\sphericalangle ABO=90^\circ+\frac{1}{2}\sphericalangle ACB$, намираме $\sphericalangle AOB_1=180^\circ-\sphericalangle AOB=90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle ACB$. Следователно $110^\circ=\sphericalangle ACB+\sphericalangle AOB_1=90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle ACB+\sphericalangle ACB$, откъдето $\sphericalangle ACB=40^\circ$.

15. В един магазин продали някакъв брой чифтове обувки и се оказало, че ако разделим броя на продадените обувки на 3, 5 и 7, ще получим съответно остатъци 1, 2 и 4. Да се намери минималният възможен брой продадени обувки.

Отговор: 172. Ако броят на обувките е x, то x трябва да има едновременно вида $3k+1$, $5m+2$ и $7l+4$, където k, m и l са цели числа. Най-малкото такова число е 67, а всички такива числа дават един и същи остатък при деление на $3.5.7=105$. Тъй като обувките са в чифтове, числото x трябва да е четно. Следователно търсеният брой е $67+105=172$.

Задачите от тази тема са предложени от Петър Бойваленков.

math-bg.com