СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

1 декември 2007 г.

Тема за 10., 11., 12. клас

(време за работа 120 минути)

След всяка от задачи от 1 до 6 има 4 отговора, само един от които е верен. Решенията на задачи 7 и 8 трябва да бъдат подробно обяснени. За верен отговор на всяка от задачите от 1 до 6 се присъждат по 3 точки. За вярно решение на всяка от задачи 7 и 8 се присъждат по 6 точки. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници може да намерите на адрес http://www.math.bas.bg/salabashev07/.

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Ако A е множеството от точки с координати (x, y), за които $|x| + 2|y| \leq 1$, то лицето на A е равно на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

2. За колко стойности на реалния параметър a уравненията $x^2+ax+1 = 0$ и $x^2+x+a^2 = 0$ имат общ реален корен?

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

3. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с катети $AC = 3$ и $BC = 4$. Максималното лице на успоредник с два върха върху хипотенузата и два върха върху катетите на триъгълника, е равно на:

А) 3; **Б)** 4; **В)** 5; **Г)** 6.

4. Броят на естествените числа, по-малки от 2007, които имат нечетен брой четни цифри, е равен на:

А) 1001; **Б)** 1002; **В)** 1003; **Г)** 1004.

5. Броят на целочислените решения на уравнението $y^3 = x^3 + 3x^2 + 7$ е равен на:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** безбройно много.

6. За колко стойности на реалния параметър a уравнението $x^2 = a|x - 1|$ има точно три различни реални корена?

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

Задача 1. Ако x и y са реални числа, за които $x^3+y^3 = x^2+y^2$, да се намерят най-голямата и най-малката стойности на израза $x + y$.

Задача 2. Група от турнира за купата на УЕФА се състои от пет отбора, които играят всеки срещу всеки по веднъж. За победа се присъждат 3 т., за равен - 1 т., а за загуба - 0 т. Ако в крайното класиране в една група отборите имат различен брой точки, то колко най-малко може да бъде сумата на тези точки?

math-bg.com

Иван Салабашев 2007

Решения на задачите от темата за 10.-11.-12. клас

1. Ако A е множеството от точки с координати (x, y), за които $|x| + 2|y| \leq 1$, то лицето на A е равно на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4.

Отговор: А. A е ромб с върхове $(\pm 1, 0)$ и $(0, \pm 1/2)$ и следователно $S_A = \dfrac{2.1}{2} = 1$.

2. За колко стойности на реалния параметър a уравненията $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a^2 = 0$ имат общ реален корен?

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

Отговор: А. Ако x_0 е общ корен, като извадим почленно двете уравнения, намираме, че $(a-1)(x_0 - a - 1) = 0$. При $a = 1$ нямаме реален корен. Следователно $x_0 = a + 1$ и тогава $(a+1)^2 + a(a+1) + 1 = 0$, т.е. $2a^2 + 3a + 2 = 0$. Това уравнение няма реални корени и следователно такива стойности на a не съществуват.

3. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с катети $AC = 3$ и $BC = 4$. Максималното лице на успоредник с два върха върху хипотенузата и два върха върху катетите на триъгълника, е равно на:

А) 3; **Б)** 4; **В)** 5; **Г)** 6.

Отговор: А. Имаме $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$. Нека $DEFG$ е успоредник, за който $D, E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CA$, $DE = x$, $h_{DE} = y$ и $CF = z$. Понеже $x/5 = z/4$ $y/3 = (4 - z)/5$, то $S = xy = 3z(4 - z)/4$ и следователно $S_{\max} = 3.2.2/4 = 3$.

4. Броят на естествените числа, по-малки от 2007, които имат нечетен брой четни цифри, е равен на:

А) 1001; **Б)** 1002; **В)** 1003; **Г)** 1004.

Отговор: Б. Да забележим, че във всяка от двойките

$$(10, 99), \ldots, (54, 55), (100, 998), \ldots, (548, 550), (1000, 1999), \ldots, (1499, 1500)$$

точно едно от числата има нечетен брой четни цифри (защо?). Тъй като числата 2, 4, 6, 8, 549, 2001, 2003, 2007 също имат нечетен брой четни цифри, то търсеният брой е равен на $45 + 449 + 500 + 8 = 1002$.

5. Броят на целочислените решения на уравнението $y^3 = x^3 + 3x^2 + 7$ е равен на:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** безбройно много.

Отговор: Б. Имаме, че $x^3 < y^3 < (x+2)^3$ при $(x+2)^3 > x^3 + 3x^2 + 7$, т.е. при $3(x+2)^2 > 11$. Оттук $y = x + 1$ при $x \neq -1, -2, -3$ и следователно $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 7$, т.е. $(x, y) = (2, 3)$. Директно се проверява, че уравнението няма цели решения при $x = -1, -2, -3$.

6. За колко стойности на реалния параметър a уравнението $x^2 = a|x - 1|$ има точно три различни реални корена?

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

math-bg.com

Отговор: Б. Даденото уравнение, което ще означаваме с (0), е еквивалентно на (1) $x^2-ax+a=0$ при $x \geq 1$ и (2) x^2+ax-a при $x \leq 1$. Понеже (1) и (2) трябва да имат реални корена, то $a^2 \geq 4a$ и $a^2 \geq -4a$. Оттук $a=0$ или $|a| \geq 4$. При $a=0$ следва, че $x=0$. При $|a| \geq 4$ корените на (1) и (2) са съответно $x_{1,2}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4a}}{2}$ и $x_{3,4}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4a}}{2}$. При $a \leq -4$ имаме, че $x_{1,2}<1<x_{3,4}$, т.е. (0) няма реални корена. При $a \geq 4$ имаме, че $x_{1,2}>1>x_{3,4}$. Следователно (0) има точно три различни реални корена само при $a=4$ ($x_1=x_2$ и $x_3 \neq x_4$).

Задача 1. Ако x и y са реални числа, за които $x^3+y^3=x^2+y^2$, да се намерят най-голямата и най-малката стойности на израза $x+y$.
Решение. Ако $a=x+y$ и $b=xy$, то $a(a^2-3b)=a^2-2b$, откъдето $b=\frac{a^3-a^2}{3a-2}$. Понеже $a^2 \geq 4b$, следва, че

$$a^2 \geq \frac{4(a^3-a^2)}{3a-2} \iff \frac{a^2(a-2)}{3a-2} \leq 0.$$

Оттук $a \in (2/3, 2]$ или $a=0$. Тъй като $x^3+y^3=x+y$ при $x=y=1$ и $x=y=0$, то най-голямата и най-малката стойности на израза $x+y$ са равни съответно на 2 и 0.

Задача 2. Група от турнира за купата на УЕФА се състои от пет отбора, които играят всеки срещу всеки по веднъж. За победа се присъждат 3 т., за равен - 1 т., а за загуба - 0 т. Ако в крайното класиране в една група отборите имат различен брой точки, то колко най-малко може да бъде сумата на тези точки?
Решение. Общият брой срещи е 10. Ако x от тях не са ремита, то броят на всички точки $3x+2(10-x)=20+x$. Ще означаваме с A, B, C, D, E, както отборите, така и техните точки. Очевидно $x \geq 1$ и можем да считаме, че A е победил B ($A \to B$). Ако $x=1$, то $C=D=E$.
Нека $x=2$. Ако A или B са участвали в другата среща, която не е реми, заедно например с C, то $D=E$. Иначе можем да считаме, че $C \to D$ и тогава $A=C$.
Нека $x=3$. Не трудно да се види, че ако $A>B>C>D>E$, то единствената възможност е $A \to D$, $A \to E$ и $B \to E$ и тогава $A=8, B=6, C=4, D=3, E=2$. И така, търсеното число е 23.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.

math-bg.com