Иван Салабашев 2006

Решения на задачите от темата за 8-9 клас

1. Нека a, b и c са различни цели числа по-големи или равни на 1 и по-малки или равни на 10. Най-голямата стойност на израза $a(b+c)-b(a+c)$ е равна на

А) 80; **Б)** 81; **В)** 84; **Г)** 90.

Отговор: (Б) Пресмятаме $a(b+c)-b(a+c)=c(a-b)$. Ако $c=10$, то $1\le a,b\le 9$ и следователно $c(a-b)\le 10.8=80$. Ако $c\le 9$, то $c(a-b)\le 9(10-1)=81$. Следователно най-голямата стойност на $c(a-b)$ е равна на 81 и тя се получава при $c=9$, $a=10$ и $b=1$.

2. Симетралите на всеки две страни на триъгълник и ъглополовящата на ъгълар образуван от тези страни се пресичат в една точка. Тогава триъгълникът е:

А) равностранен; **Б)** правоъгълен; **В)** с ъгъл 30°; **Г)** с ъгъл 45°.

Отговор: (А) Нека триъгълникът е ABC, M и N са средите на AC и BC и O е пресечната точка на симетралите на AC и BC. Тогава OC е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$. Следователно $\triangle OMC\equiv\triangle ONC$ (OC – обща, $\sphericalangle MCO=\sphericalangle NCO$ и $\sphericalangle OMC=\sphericalangle ONC=90^\circ$). Оттук $MC=NC$, т.е. $AC=BC$. Аналогично $BC=AB$ и значи $\triangle ABC$ е равностранен.

3. Броят на несъкратимите дроби от вида $\dfrac{n+4}{n^2+7}$, където $n=1,2,\ldots,1000$ е равен на:

А) 657; **Б)** 757; **В)** 857; **Г)** 957.

Отговор: (Г) Нека дробта $\dfrac{n+4}{n^2+7}$ е съкратима, т.е. числителят и знаменателят се делят на $d>1$. От $n^2+7=(n+4)(n-4)+23$ следва, че d дели 23. Следователно $n+4$ се дели на 23. Тъй като $1004=43.23+15$, то броят на тези n е равен на 43. Следователно броят на несъкратимите дроби е $1000-43=957$.

4. Броят на четирицифрените числа с първа цифра 1 и поне три равни цифри е равен на:

А) 35; **Б)** 36; **В)** 37; **Г)** 38.

Отговор: (В) Числата от вида $\overline{1aaa}$, където $a\ne 1$ са 9. Останалите четирицифрени числа от разглеждания вид имат първа цифра 1 и поне две от останалите им цифри също са равни на 1. Техният брой е 28 и следователно общият брой на разглежданите числа е $9+28=37$.

5. Колко са двойките (a,b) от реални числа такива, че $|ax+by|+|bx+ay|=|x|+|y|$ за произволни реални числа x и y? **А)** 2; **Б)** 4; **В)** 6; **Г)** 8.

Отговор: (Б) При $x=\pm y=1$ следва, че $|a\pm b|=1$, т.е. $a^2+b^2\pm 2ab=1$. Оттук $ab=0$, т.е. $a=0$ или $b=0$, и съответно $b=\pm 1$ или $a=\pm 1$. Следователно $(a,b)=(1,0),(-1,0),(0,1),(0,-1)$, като и четирите двойки изпълняват даденото условие.

6. Нека $ABCD$ е изпъкнал четириъгълник, в който $\sphericalangle ABD=50^\circ$, $\sphericalangle CAB=60^\circ$, $\sphericalangle DBC=10^\circ$ и $\sphericalangle CAD=20^\circ$. Тогава $\sphericalangle ACD$ е равен на: **А)** 70°; **Б)** 75°; **В)** 80°; **Г)** 90°.

Отговор: (В) Триъгълник ABC е равностранен, защото $\sphericalangle ABC=\sphericalangle ABD+\sphericalangle DBC=60^\circ=\sphericalangle CAB$. Освен това $\sphericalangle BDA=180^\circ-\sphericalangle DAB-\sphericalangle DBA=50^\circ=\sphericalangle ABD$. Следователно $AD=AB=AC$, т.е. $\sphericalangle ADC=\sphericalangle ACD$. От $\triangle CAD$ следва, че $\sphericalangle ACD=80^\circ$.

7. Броят на двойките (a,b) от цели числа, за които $a^4-2008ab+b^2+4=0$ е равен на:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 2008.

math-bg.com

Отговор: (А) Да допуснем, че (a, b) изпълнява условието. Тогава $4|a^4 + b^2$, т.е. $2|a$ и $2|b$. Нека $a = 2m$, $b = 2n$. Тогава от условието следва,че $4|n^2 + 1$, което е невъзможно.

8. Числото $\frac{1}{1+1^2+1^4} + \frac{2}{1+2^2+2^4} + \cdots + \frac{9}{1+9^2+9^4}$ е представено като несъкратима дроб $\frac{m}{n}$. Последната цифра на m е равна на: **А)** 1; **Б)** 3; **В)** 5; **Г)** 7.

Отговор: (В) Понеже

$$\frac{n}{1+n^2+n^4} = \frac{n}{(1-n+n^2)(1+n+n^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-n+n^2} - \frac{1}{1+n+n^2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(n-1)+(n-1)^2} - \frac{1}{1+n+n^2}\right),$$

то числото е равно на $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+9+9^2}\right) = \frac{45}{91}$.

9. Нека ABC е равностранен триъгълник със страна 5. Върху страните AB, BC и CA са взети съответно точки P, Q и R, за които $AP = 4$, $BQ = 4$ и $CR = 3$. Отношението на лицата на триъгълниците PQR и ABC е равно на:

А) $\frac{9}{25}$; **Б)** $\frac{2}{5}$; **В)** $\frac{11}{20}$; **Г)** $\frac{3}{7}$.

Отговор: (Б) $\frac{S_{PBQ}}{S_{PBC}} = \frac{BQ}{BC} = \frac{4}{5}$ и $\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}} = \frac{PB}{AB} = \frac{1}{5}$. Следователно $\frac{S_{PBQ}}{S_{ABC}} = \frac{4}{25}$. Аналогично намираме, че $\frac{S_{PAR}}{S_{ABC}} = \frac{8}{25}$ и $\frac{S_{RQC}}{S_{ABC}} = \frac{3}{25}$. Следователно $\frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{4}{25} - \frac{8}{25} - \frac{3}{25} = \frac{2}{5}$.

10. Колко са естествените числа n, за които най-малкото общо кратно на 6^6, 8^8 и n е равно на 12^{12}?

А) 10; **Б)** 15; **В)** 20; **Г)** 25.

Отговор: (Г) Тъй като $6^6 = 2^6 3^6$, $8^8 = 2^{24}$ и $12^{12} = 2^{24}3^{12}$, то n има вида $n = 2^k 3^m$, където k и m са неотрицателни цели числа. Тъй като НОК$(2^6 3^6, 2^{24}, 2^k 3^m) = 2^{24}.3^{12}$ следва, че $m = 12$ и $0 \le k \le 24$. Следователно търсеният брой е 25.

11. Даден е трапец $ABCD$, $(AB \parallel CD)$ с бедра $BC = 50$ и $AD = 70$. Окръжност с център P върху основата AB се допира до бедрата на трапеца. Да се намери отношението $\frac{AP^2 + BP^2}{AB^2}$.

Отговор: $(\frac{37}{72})$ Нека E и F са петите на перпендикулярите от P към AD и BC. Тогава $PE = PF$ и $\frac{S_{APD}}{S_{BPC}} = \frac{AD.PE}{BC.PF} = \frac{AD}{BC} = \frac{7}{5}$. От друга страна височината на $\triangle APD$ през върха D е равна на височината на $\triangle BPC$ през върха C, защото $AB \parallel CD$. Следователно $\frac{S_{APD}}{S_{BPC}} = \frac{AP}{BP}$ и от горното равенство следва, че $\frac{AP}{BP} = \frac{5}{7}$. Тъй като $AP + BP = AB$ следва, че $\frac{AP}{AB} = \frac{5}{12}$ и $\frac{BP}{AB} = \frac{7}{12}$. Следователно $\frac{AP^2 + BP^2}{AB^2} = \frac{5^2 + 7^2}{12^2} = \frac{37}{72}$.

12. Нека a, b и c са реални числа, за които $\frac{a(b-c)}{b(c-a)} = \frac{2b(c-a)}{c(b-a)} = k > 0$. Да се намери k.

math-bg.com

Отговор: (1) Нека $ab = x$, $bc = y$ и $ca = z$. От условието следва, че $x - z = k(y - x)$ и $2(y-x) = k(y-z)$. От първото равенство намираме, че $x = \dfrac{z+ky}{k+1}$ и като заместим във второто получаваме, че $k(y-z) = 2\left(y - \dfrac{z+ky}{k+1}\right) = \dfrac{2(y-z)}{k+1}$. Тъй като $y \neq z$ следва, че $k(k+1) = 2$, т.е. $(k-1)(k+2) = 0$. Оттук $k = 1$, защото $k > 0$. Лесно се проверява, че при $k = 1$ има числа a, b и c с даденото свойство (например $a = 1$, $b = 2$ и $c = \dfrac{4}{3}$).

13. Да се намери броят на триъгълниците, чиито върхове имат целочислени координати (x, y), за които $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.

Отговор: (2160) Броят на точките с целочислени координати (x, y), за които $-2 \leq x, y \leq 2$, е равен на 5.5=25. От тях можем да изберем три по $\binom{25}{3} = 2300$ начина. Трябва да извадим тройките от точки, които лежат на една права. По петте хоризонтални прави те са $\binom{5}{3} = 10$. Същото важи и по вертикалните прави. Имаме два главни диагонала по пет точки, четири диагонала по четири точки и четири диагонала по три точки. Значи трябва да извадим още $2.10 + 4.4 + 4 = 40$ тройки точки. И така отговорът е $2300 - 100 - 40 = 2160$.

14. Да се намери сумата на всички цели числа k, за които $k^2 + k + 10$ е квадрат на цяло число.

Отговор: (-2) При $k > 2$ имаме, че $k^2 < k^2+k+10 < (k+2)^2$. Следователно $k^2+k+10 = (k+1)^2$, т.е. $k = 9$. При $k < -3$ имаме, че $(k+1)^2 < k^2 + k + 10 < (k-1)^2$.Следователно $k^2 + k + 10 = k^2$, т.е. $k = -10$. При $k = -3, -2, -1, 0, 1, 2$ с директна проверка се вижда, че $k^2 + k + 10$ е точен квадрат само при $k = -3$ и $k = 2$. Търсената сума е равна на $-10 + -3 + 2 + 9 = -2$.

15. Да се намери най-малкото естествено число n, за което уравнението $2xy - 3x - 5y = n$ има нечетен брой решения в естествени числа.

Отговор: (5) Записваме уравнението във вида $(2x - 5)(2y - 3) = 2n + 15$. Тогава $2x - 5 = d$, $2y - 3 = \dfrac{2n+15}{d}$, където d е делител на числото $2n + 15$. Ако d е отрицателно число, то $d + 5 = 2x > 0$, откъдето $2y = \dfrac{2n + 3(d+5)}{d} < 0$, което е противоречие. Следователно d е положителен делител на числото $2n + 15$. Тъй като делителите на $2n + 15$ са нечетни числа следва, че даденото уравнение има нечетен брой решения в естествени числа тогава и само тогава, когато числото $2n+15$ има нечетен брой положителни делители. Директно се проверява, че най-малкото n с това свойство е $n = 5$.

math-bg.com