Иван Салабашев 2006

Решения на задачите от темата за 10-11-12 клас

1. Квадратна функция приема в точките 1, 2 и 3 съответно стойности -3, -1 и 3. Каква стойност приема тя в точката 4?

А) 0; **Б)** 9; **В)** 10; **Г)** 15.

Отговор: (Б) Нека квадратната функция е $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тогава

$$\left| \begin{array}{l} a + b + c = -3 \\ 4a + 2b + c = -1 \\ 9a + 3b + c = 3 \end{array} \right. .$$

Като извадим от второто уравнение първото, получаваме, че $3a + b = 2$. Аналогично от второто и третото уравнения намираме, че $5a+b = 4$. Следователно $2a = (5a+b)-(3a+b) = 4 - 2 = 2$, т.е. $a = 1$. Тогава $b = -1$, $c = -3$ и $f(4) = 1.4^2 - 1.4 - 3 = 9$.

2. Да се намери броят на двойките (a, b) от реални числа такива, че $|ax + by| + |bx + ay| = |x| + |y|$ за произволни реални числа x, y.

А) 2; **Б)** 4; **В)** 6; **Г)** 8.

Отговор: (Б) При $x = \pm y = 1$ следва, че $|a \pm b| = 1$, т.е. $a^2 + b^2 \pm 2ab = 1$. Оттук $ab = 0$, т.е. $a = 0$ или $b = 0$, и съответно $b = \pm 1$ или $a = \pm 1$. Следователно $(a, b) = (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)$, като и четирите двойки изпълняват даденото условие.

3. Ако a, b, c са реални числа, за които $\dfrac{a(b-c)}{b(c-a)} = \dfrac{b(c-a)}{c(b-a)} = k > 0$, то цялата част на k е равна на:

А) 0; **Б)** 1; **В)** 2; **Г)** 3.

Отговор: (А) Полагаме $x = ab, y = bc, z = ca$. Тогава $x - z = k(y - x)$, $y - x = k(y - z)$, откъдето $y = \dfrac{x(k+1) - z}{k} = \dfrac{kz - x}{k - 1}$ (понеже $k \neq 0$, то $x \neq z$ и значи $k \neq 1$). Оттук

$$(k-1)(x(k+1) - z) = k(kz - x) \iff (x - z)(k^2 + k - 1) = 0$$

и следователно $k^2 + k - 1 = 0$. Сега от $k > 0$ следва, че $k = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, откъдето $[k] = 0$.

4. Нека $ABCD$ е ромб, за който $\sphericalangle ABCD = 60°$. Ако E е точка от вътрешността му, за която $\sphericalangle AEC = 120°$, $BE = 4$ и $DE = 5$, то $AE.CE$ е равно на:

А) 3; **Б)** 4; **В)** 5; **Г)** 6.

Отговор: (А) Понеже $AECD$ е вписан в окръжност четириъгълник, от теоремата на Птолемей следва, че $CD.AE + AD.CE = AC.DE$, т.е. $AE + CE = 5$. Нека F е образът на E при ротация с център C и ъгъл $\sphericalangle 60°$ в положителна посока. Тъй като B е образът на A при тази ротация, то $\sphericalangle BFC = \sphericalangle AEC = 120°$ и $BF = AE$. Освен това, $\triangle CEF$ е равностранен. Следователно $\sphericalangle BFE = \sphericalangle BFC - \sphericalangle EFC = 60°$ и тогава

$$16 = BE^2 = BF^2 + EF^2 - 2BF.EF \cos 60° = AE^2 + CE^2 - AE.CE$$

$$= (AE + CE)^2 - 3AE.CE = 25 - 3AE.CE,$$

math-bg.com

откъдето $AE.CE = \frac{25-16}{3} = 3$.

5. Числото $\dfrac{1}{1+1^2+1^4} + \dfrac{2}{1+2^2+2^4} + \cdots + \dfrac{9}{1+9^2+9^4}$ е представено като несъкратима дроб $\dfrac{m}{n}$. Последната цифра на m е равна на:

А) 1; **Б)** 3; **В)** 5; **Г)** 7.

Отговор: (В) Понеже

$$\frac{n}{1+n^2+n^4} = \frac{n}{(1-n+n^2)(1+n+n^2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-n+n^2} - \frac{1}{1+n+n^2}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+(n-1)+(n-1)^2} - \frac{1}{1+n+n^2}\right),$$

то числото е равно на $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{1+9+9^2}\right) = \dfrac{45}{91}$.

6. Броят на триъгълниците, чиито върхове имат целочислени координати (x, y), за които $-2 \le x, y \le 2$, е равен на:

А) 2160; **Б)** 2200; **В)** 2260; **Г)** 2300.

Отговор: (А) Броят на точките целочислени координати (x, y), за които $-2 \le x, y \le 2$, е равен на 5.5=25. От тях можем да изберем три по $\binom{25}{3} = 2300$ начина. Трябва да извадим тройките от точки, които лежат на една права. По петте хоризонтални прави те са $\binom{5}{3} = 10$. Същото важи и по вертикалните прави. Имаме два главни диагонала по пет точки, четири диагонала по четири точки и четири диагонала по три точки. Значи трябва да извадим още $2.10 + 4.4 + 4 = 40$ тройки точки. И така отговорът е $2300 - 100 - 40 = 2160$.

Задача 1. Да се реши системата $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x^2-2x+6} = y \\ \sqrt{y^2-2y+6} = z \\ \sqrt{z^2-2z+6} = x \end{array}\right.$.

Решение. Ясно е, че $x, y, z > 0$. След повдигане на квадрат и събиране на трите уравнения, получаваме, че $x+y+z = 9$. Значи поне едно от числата, например x, е не по-малко от 3. Тогава $y^2 - 9 = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3) \ge 0$, т.е. $y \ge 3$. Аналогично $z \ge 3$. Следователно $x = y = z = 3$.

Задача 2. В равнината са дадени 999 точки. Да се докаже, че различните разстояния между тях са поне 19.

Решение. Да фиксираме две точки A и B. За всяка друга точка C разглеждаме двойката (a_c, b_c) от разстоянията от C до A и B. Ако различните разстояния са по-малко от 19, то тези двойки са най-много 18^2. Следователно поне $[997/18^2] = 3$ от двойките съвпадат. От друга страна, $(a_{c_1}, b_{c_1}) = (a_{c_2}, b_{c_2})$ то точките C_1 и C_2 са симетрични относно правата AB. Следователно най-много две двойки могат да съвпадат, което е противоречие.

math-bg.com