СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"

29 ноември 2003 г.

Тема за 10-12 клас

(време за работа 120 минути)

След всеки от първите 6 въпроса има по 5 отговора, само един от които е верен. За неверен отговор не се присъждат точки. За непосочен отговор се присъжда 1 точка, а за верен отговор се присъждат 3 точки. Правилно решение на всяка от двете задачи се оценява с 6 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Крайното класиране на всички участници в Турнира може да намерите на адрес www.math.bas.bg

Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Броят на различните решения на системата $\left| \begin{array}{l} x^3 - y^2 = 2002.2003^2 \\ y^3 - x^2 = 2002.2003^2 \end{array} \right.$ е равен на:

А) 1; **Б)** 2; **В)** 3; **Г)** 4; **Д)** 5.

2. Нека X и Y са точки върху страните BC и CD на квадрат $ABCD$, за които $XY = 3$, $AX = 4$ и $AY = 5$. Страната на квадрата е равна на:

А) $\frac{16\sqrt{16}}{17}$; **Б)** $\frac{17\sqrt{17}}{16}$; **В)** $\frac{17\sqrt{16}}{16}$; **Г)** $\frac{16\sqrt{17}}{17}$; **Д)** 6.

3. В успоредник с лице 1 средата на всяка страна е съединена с върховете на срещуположната ѝ страна. Сечението на получените четири триъгълника е осмоъгълник с лице:

А) $\frac{1}{4}$; **Б)** $\frac{1}{5}$; **В)** $\frac{1}{6}$; **Г)** $\frac{1}{7}$; **Д)** друг отговор.

4. Дадена е редицата $4, 7, 1, 8, 9, 7, \ldots$, чийто n-ти член при $n > 2$ е равен на последната цифра на сумата на предходните два члена. Ако сумата на първите n члена на редицата е равна на 12345, то n е равно на:

А) 1357; **Б)** 2468; **В)** 3579; **Г)** 4680; **Д)** 5791.

5. Броят на целите числа n от 1 до 2003 включително, за които $1^n + 2^n + \cdots + 2004^n$ се дели на 5 е равен на:

А) 1003; **Б)** 1203; **В)** 1403; **Г)** 1503; **Д)** 1803.

6. В равнината са дадени 2003 точки, никои три от които не лежат на една права. Колко най-много отсечки могат да се прекарат, така че да няма триъгълник с върхове измежду дадените точки?

А) 1003002; **Б)** 11022; **В)** 2002; **Г)** 202303; **Д)** 303101.

Задача 1. Да се намери най-малкото естествено число, което може да се представи поне по 4 различни начина във вида $14a + 41b$, където a и b са естествени числа.

Задача 2. Две окръжности са вписани в успоредник така, че се допират една до друга и всяка се допира до три страни на успоредника. Ако тези окръжности делят единия диагонал на успоредника на 4 равни части, в какво отношение те делят другия диагонал?

Математически турнир "Иван Салабашев"

29 ноември 2003 г.

Решения на задачите от темата за 10-12 клас

1. Отговор: (А). Единственото решение на системата е $x = 2003$, $y = 2003$. Наистина, като извадим двете уравнения получаваме, че $(x-y)(x^2+y^2+xy+x+y) = 0$. От първото уравнение следва, че $x > 0$, а от второто, че $y > 0$. Следователно $x^2+y^2+xy+x+y > 0$, т.е. $x = y$. Тогава $x^3 - x^2 = 2003^3 - 2003^2$, което записваме във вида $(x - 2003)(x^2 + 2002x + 2002.2003) = 0$. Тъй като $x > 0$ заключаваме, че $x = y = 2003$.

2. Отговор: (Г). Тъй като $AX^2+XY^2 = AY^2$, то $\angle AXY = 90°$. Следователно $\angle AXB = 90° - \angle YXC = \angle XYC$ и значи $\triangle ABX \sim \triangle XCY$. Оттук $\dfrac{AB}{XC} = \dfrac{AX}{XY} = \dfrac{4}{3}$. Следователно $AB = \dfrac{4}{3}XC = \dfrac{4}{3}(AB - XB)$, т.е. $XB = \dfrac{AB}{4}$. Сега от $AB^2 + XB^2 = AX^2 = 16$ намираме, че $AB = \dfrac{16\sqrt{17}}{17}$.

3. Отговор: (В). Нека P, Q, R и S са среди съответно на страните AB, BC, CD и DA и $X = AR \cap DP$, $Y = SQ \cap PR$, $Z = SC \cap DQ$ и $T = AR \cap SC$. Тъй като RX и SZ са медиани в $\triangle SYR$ и $SYRD$ е успоредник, то $S_{XYZT} = \dfrac{1}{3}S_{SYR} = \dfrac{1}{6}S_{SYRD}$. Аналогично, лицата на останалите три четириъгълника от осмоъгълника са равни на $\dfrac{1}{6}$ част от лицата на успоредниците $QYRC$, $QYPB$ и $SYAP$. Следователно лицето на осмоъгълника е $\dfrac{1}{6}$ част от лицето на успоредника.

4. Отговор: (Б). Като запишем още членове на редицата виждаме, че тя е периодична с период 12:

$$4, 7, 1, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, 4, 7, \ldots$$

Нека S_n е сумата на първите n члена на редицата. Тогава $S_{12} = 60$ и ако $n = 12k + m$, $0 \le m \le 11$, то $S_n = kS_{12} + S_m = 60k + S_m$, като $0 \le S_m < 60$. Нека $S_n = 12345$. Тогава $60k + S_m = 12345$ и следователно $k = 205$ и $S_m = 45$. От последното равенство намираме, че $m = 8$ и оттук $n = 12.205 + 8 = 2468$.

5. Отговор: (Г). Числото $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ се дели на 5 ако n не се дели на 4 и дава остатък 4, ако n се дели на 4. Като махнем числата в сумата $1^n + 2^n + \cdots + 2004^n$, които се делят на 4 и групираме останалите в 401 четворки заключаваме, че даденото число се дели на 5, точно когато n не се дели на 4. Броят на числата от 1 до 2003, които се делят на 4 е равен на 500. Следователно търсеният брой е равен на $2003 - 500 = 1503$.

6. Отговор: (А). Да свържем някои от точките с отсечки, така че да няма триъгълник. Да изберем точка A, от която излизат най-много отсечки. Нека тази точка е свързана с точките $A_1, A_2, \ldots, A_k$. От всяка от тези точки излизат най-много (като не броим отсечката AA_i) $2002 - k$ отсечки (това са отсечки към останалите $2002 - k$ точки), а от всяка от останалите $n - k - 1$ точки (с които A не е свързана) излизат максимум по k отсечки. Тогава общият брой отсечки без да броим AA_i не надминава $\dfrac{k(2002-k) + (2002-k)k}{2} = k(2002 - k)$. Окончателно всички прекарани отсечки са не повече от $k(2003 - k)$, което число не надминава $1001.1002 = 1003002$. Ако разделим дадените точки на две множества с 1001 и 1002 точки и свържем всяка точка от едното множество с всяка точка от другото множество, ще получим 1003002 отсечки без триъгълник.

Задача 1. Отговор: 1777. Нека N има исканото свойство, т.е. $N = 14m_i + 41n_i, 1 \le i \le 4$. Тогава при $1 \le i \ne k \le 4$ имаме $14(m_k - m_i) = 41(n_i - n_k)$. Ако $m_k = m_i$, то $n_k = n_i$ и значи съответните представяния не са различни. Следователно можем да предполагаме, че $m_1 < m_2 < m_3 < m_4$. Тъй като числата 14 и 41 са взаимнопрости, то 41 дели $m_2 - m_1$ и значи $m_2 \ge m_1 + 41$. Аналогично $m_3 \ge m_2 + 41$

и $m_4 \geq m_3 + 41$. Оттук $m_4 \geq m_1 + 3.41 \geq 124$ и следователно $N = 14m_4 + 41n_4 \geq 14.124 + 41.1 = 1777$. Сега остава да се отбележи, че 1777 има исканото свойство, защото

$$\begin{aligned} 1777 &= 14.124 + 41.1 = 14(124 - 41) + 41(1 + 14) = \\ &= 14(124 - 41.2) + 41(1 + 14.2) = 14(124 - 41.3) + 41(1 + 14.3) \end{aligned}$$

Задача 2. Отговор: $1 : \frac{3\sqrt{3}-5}{4} : \frac{3\sqrt{3}-5}{4} : 1$. Нека окръжностите делят на 4 равни части диагонала AC на успоредника $ABCD$. Тогава те се допират в средата O на AC и имат равни радиуси r. Нека $L = k_1 \cap AD$, $S = k_1 \cap AB$ и $T = k_1 \cap DC$, $K = k_1 \cap DO$, $N = k_1 \cap AO$ и $AS = AL = x, DL = DT = y$ и $AN = NO = a$. Прекарваме височината FR, $F \in CD$, $R \in AB$ на успоредника през O. Тогава $FR = 2r, OR = OF = r, SR = TF = r$ и $HS = DT = y$. От $\triangle AHD$ намираме, че $(x+y)^2 = (x-y)^2 + (2r)^2$, т.е. $xy = r^2$. От друга страна $AN.AO = AS^2$, откъдето $2a^2 = x^2$. От $\triangle ARO$ имаме $4a^2 = (x+r)^2 + r^2 = x^2 + 2xr + 2r^2$. Следователно $2xr + 2xy = x^2$, т.е. $x = 2(y+r)$. Оттук $2ry + y^2 = xy = r^2$, т.е. $\left(\frac{r}{y}\right)^2 - 2\frac{r}{y} - 2 = 0$ и значи $\frac{r}{y} = 1 + \sqrt{3}$. От $\triangle DFO$ имаме $DO^2 = (y+r)^2 + r^2 = y^2 + 2yr + 2r^2$. Сега от $DK.DO = DT^2 = y^2$ получаваме, че

$$\frac{DO}{DK} = \frac{DO^2}{y^2} = \frac{y^2 + 2yr + 2r^2}{y^2} == 1 + 2\frac{r}{y} + 2\left(\frac{r}{y}\right)^2 == 1 + 2(1+\sqrt{3}) + 2(1+\sqrt{3})^2 = 11 + 6\sqrt{3}.$$

Следователно $\frac{DK}{KO} = \frac{DK}{DO - DK} = \frac{1}{\frac{DO}{DK} - 1} = \frac{3\sqrt{3} - 5}{4}$.

Задачите от тази тема са предложени от Олег Мушкаров.