СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ
СЕКЦИЯ "ИВАН САЛАБАШЕВ" - СТАРА ЗАГОРА

Математически турнир "Иван Салабашев"
30 ноември 2002 г.
Тема за 10-11-12 клас
(време за работа 120 минути)

След всяка от първите 6 задачи има по 5 отговора, само един от които е верен. За неверен или непосочен отговор не се присъждат точки. За посочен верен отговор на задачи 1, 2 и 3 се присъждат по 2 точки, за верен отговор на задачи 4, 5 и 6 се присъждат по 4 т. Всяка от задачи 7 и 8 се оценява с 0 до 6 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори. Журито Ви пожелава приятна работа.

---

1. Множеството от точки с координати (x, y), за които $\big||x| + 2|y|\big| + \big||x| - 2|y|\big| = 1$ е:

(А) празно; (Б) триъгълник; (В) правоъгълник; (Г) ромб; (Д) квадрат.

2. Графиката на функцията $\dfrac{4x^2 - 1}{|x| + |x - 1|}$ се състои от:

(А) една отсечка и два лъча; (Б) една част от парабола и два лъча; (В) две части от парабола и една отсечка; (Г) две части от парабола и един лъч; (Д) три части от парабола.

3. Сумата на всички петцифрени числа с нечетни цифри завършва на:

(А) 1; (Б) 3; (В) 5; (Г) 7; (Д) 9.

4. Едно число се записва при бройна система при основа x като $\overline{20*}$. Ако същото число се записва в бройна система при основа $x + 1$ като $\overline{113}$, то x е равно на:

(А) 3; (Б) 4; (В) 5; (Г) 6; (Д) не може да се определи еднозначно.

5. От 4 бели и 6 черни топки случайно са избрани две. Вероятността те да са разноцветни е:

(А) $\frac{1}{3}$; (Б) $\frac{1}{2}$; (В) $\frac{2}{3}$; (Г) $\frac{3}{4}$; (Д) друго число.

6. Нека $P(x)$ е полином от степен 2000 такъв, че $P(n) = \dfrac{1}{n}$ за $n = 1, 2, \ldots, 2001$. Стойността на $P(2002)$ е:

(А) $\frac{1}{1000}$; (Б) $\frac{1}{1001}$; (В) $\frac{1}{2000}$; (Г) $\frac{1}{2001}$; (Д) $\frac{1}{2002}$.

Задача 1. Нека CH и CL са съответно височина и ъглополовяща в $\triangle ABC$, като H и L са различни точки върху страната AB. Описаната окръжност около $\triangle CHL$ пресича за втори път страните AC и BC съответно в точки D и E. Да се докаже, че правите AE, BD и CH се пресичат в една точка.

Задача 2. Да се намерят всички функции f, дефинирани върху множеството на реалните числа и приемащи стойности в същото множество, такива че

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \text{ за всеки } x, y \text{ и } f(x) = x^2 f\left(\frac{1}{x}\right) \text{ за всяко } x \neq 0.$$

Математически турнир "Иван Салабашев"
30 ноември 2002 г.
Решения на задачите от темата за 10-11-12 клас

1. Отговор: (C).
2. Отговор: (B).
3. Отговор: (C).
4. Отговор: (B).
5. Отговор: (E).
6. Отговор: (B).

Задача 1. Имаме, че $AD.AC = AH.AL$, $BE.BC = BL.BH$, $\frac{AC}{BC} = \frac{AL}{BL}$ и следователно $\frac{AH}{BH} = \frac{AD}{BE}$. От друга страна, правоъгълните триъгълници CLD и CLE са еднакви по втори признак. В частност, $CD = CE$ и тогава $\frac{AH}{BH}\frac{BE}{CE}\frac{CD}{AD} = 1$, т.е. правите AE, BD и CH се пресичат в една точка съгласно теоремата на Чева.

Задача 2. Понеже $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x}$ при $x \neq 0, 1$, то

$$\frac{f(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{f(x(x-1))}{x^2(x-1)^2} + \frac{f(x)}{x^2},$$

и следователно

$$x^2 f(x-1) = f(x^2 - x) + (x-1)^2 f(x),\ 2xf(x) = f(x^2) + x^2 c,$$

където $c = f(1)$. Като извадим последното равенство от същото равенство за $x + \frac{1}{x}$ вместо x, получаваме, че

$$\frac{2f(x)}{x} + 2\left(x + \frac{1}{x}\right) f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{1}{x^2}\right) + \frac{c}{x^2} + 4c = \frac{2}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) + 4c.$$

Тогава

$$2\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x)}{x} + \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = 2c,$$

т.е. $f(x) = cx$ за $x \neq 0, 1$. Остава да отбележим, че това равенство е очевидно при $x = 0, 1$ и функциите от този вид изпълняват условието на задачата.

Задачите от тази тема са предложени от Николай Николов.

Очакваме Ви на 22.03.2003 г. за участие в Европейското математическо Кенгуру.