Общински кръг на LIX Републиканска олимпиада по математика
28 февруари 2010 година – София

8. клас

1. **а)** Да се реши уравнението $2x^2 + 9x = 2a$, ако $a = \frac{\sqrt{80} - 0,5\sqrt{20}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{16,9}}{\sqrt{0,9}}$.

3 точки

б) Дадена е функцията $f(x) = ax - 2b$. Намерете a и b така, че произведението ab да е възможно най-малко и точката $A(1; -8)$ да лежи на графиката на $f(x)$. **4 точки**

2. Точка C_1 е средата на страната AB на триъгълника ABC. Върху страните BC и AC са избрани съответно точките A_1 и B_1 такива, че триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ имат общ медицентър.

а) Докажете, че A_1B_1 е средна отсечка в $\triangle ABC$; **4 точки**

б) Ако $AA_1 \perp BB_1$ и P е средата на BC_1, намерете средната основа на трапеца ABA_1B_1, ако $A_1P = 10$ cm. **3 точки**

3. Намерете стойностите на параметъра m, за които уравнението $(x-1)(mx^2 - x + 2m - 1) = 0$ има два различни реални корена. **7 точки**

math-bg.com

УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

8. клас

1. а) Да се реши уравнението $2x^2 + 9x = 2a$, ако $a = \frac{\sqrt{80} - 0,5\sqrt{20}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{16,9}}{\sqrt{0,9}}$.

3 точки

б) Дадена е функцията $f(x) = ax - 2b$. Намерете a и b така, че произведението ab да е възможно най-малко и точката $A(1; -8)$ да лежи на графиката на $f(x)$. **4 точки**

а) Намерено: $a = 13$ 2 точки

корените на уравнението $x_1 = 2, x_2 = -6,5$ 1 точка

б) Доказано, че от A лежи на графиката на $y = f(x) \Rightarrow a = 2b - 8$ 2 точки

Изразено $ab = (2b - 8)b = 2(b - 2)^2 - 8$ 1 точка

Намерено $b = 2$, $a = -4$ 1 точка

2. Точка C_1 е средата на страната AB на триъгълника ABC. Върху страните BC и AC са избрани съответно точките A_1 и B_1 такива, че триъгълниците ABC и $A_1B_1C_1$ имат общ медицентър.

а) Докажете, че A_1B_1 е средна отсечка в $\triangle ABC$; **4 точки**

б) Ако $AA_1 \perp BB_1$ и P е средата на BC_1, намерете средната основа на трапеца ABA_1B_1, ако $A_1P = 10$ cm. **3 точки**

а) Доказано: медицентърът $G \in CC_1$ и $CG : GC_1 = 2 : 1$; $CG = 2x$ и $GC_1 = x$ 1 точка

$C_1G \cap A_1B_1 = M$ – средата на A_1B_1 и $C_1G : GM = 2 : 1 \Rightarrow GM = \frac{x}{2}$ и $C_1M = CM = \frac{3x}{2}$ 1 точка

$A_1CB_1C_1$ е успоредник 1 точка

От $A_1C_1 \parallel AC$, $B_1C_1 \parallel BC$ и C_1 среда на $AB \Rightarrow A_1$ и B_1 са средите съответно на BC и AC 1 точка

б) Доказано: A_1P – средна отсечка в $\triangle C_1BC \Rightarrow CC_1 = 2A_1P = 24$ cm 1 точка

$GC_1 = 8$ cm и $GM = 4$ cm 1 точка

$AB = 2\,GC_1 = 16$ cm и $A_1B_1 = 2\,GM = 8$ cm. $\frac{16+8}{2} = 12$ cm е дължината на средната основа на трапеца 1 точка

3. Намерете стойностите на параметъра m, за които уравнението $(x-1)(mx^2 - x + 2m - 1) = 0$ има два различни реални корена. **7 точки**

Уравнението има корен $x_1 = 1$ и ще има два различни корена, ако уравнението $mx^2 - x + 2m - 1 = 0$ има точно един корен, различен от 1. 1 точка

Разгледани случаите:

1 сл. $m = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$, т.е. $m = 0$ е решение 1 точка

2 сл. $D = 0 \Rightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$. При $m = \frac{1+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2m} = \frac{2}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3} - 1 \neq 1$

и при $m = \frac{1-\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2m} = \frac{2}{1-\sqrt{3}} = -1 - \sqrt{3} \neq 1$, т.е. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4}$ са решения 2 точки

3 сл. уравнението $mx^2 - x + 2m - 1 = 0$ има два различни корена, единият от които е равен на 1, т.е. $m.1^2 - 1 + 2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{2}{3}$. Наистина при $m = \frac{2}{3}$ получаваме уравнението $\frac{2}{3}x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$ с корени 1 и $\frac{1}{2}$, т.е. $m = \frac{2}{3}$ е решение. 3 точки

math-bg.com