МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО - ПАЗАРДЖИК

4400 гр. Пазарджик, ул. "П. Яворов" № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: riopz@pasat.bg, http://riopz.com/

XII клас

Зад.1 Хипотенузата AB на правоъгълния триъгълник ABC лежи в равнината π, а катетите му AC и BC сключват с тази равнина съответно ъгли α и β. Да се определи ъгълът между равнината на триъгълника и равнината π. **7 точки**

Зад.2 Дадена е функцията $f(x)=2^{2\cos x}-3a.2^{\cos x}+2a^2$, където a е параметър.

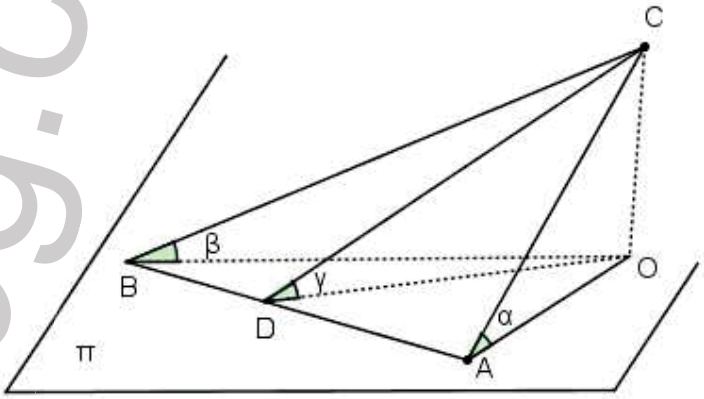
а) Да се реши уравнението $f(x)=0$ за a=1.

б) За кои стойности на а уравнението $f(x)=0$ има решение.

в) Да се намери най-голямата и най-малка стойност на $f(x)$. **7 точки**

Зад.3 Нека G е медицентър на правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза AB. Да се намери възможно най-голямата стойност на cotg$\measuredangle AGB$. **7 точки**

Зад.1



Нека т. O е ортогоналната проекция на върха C в равнината π. Тогава $\measuredangle OAC=\alpha$ и $\measuredangle OBC=\beta$, α, $\beta\in(0^0,90^0)$ **(1 точка).**

Прекарваме $CD\perp AB$ равнината (ABC), откъдето по теорема за трите перпендикуляра $\Rightarrow$ $OD\perp AB$ $\Rightarrow\measuredangle ODC=\gamma$ е търсеният двустенен ъгъл **(2 точки)**. Да означим $OC=x$, $x>0$. От правоъгълните триъгълници OAC и OBC $\Rightarrow$ $AC=\dfrac{x}{\sin\alpha}$ и $BC=\dfrac{x}{\sin\beta}$ **(1точка).** По теорема на Питагор за ΔABC $\Rightarrow AB=\sqrt{AC^2+BC^2}\Rightarrow AB=\dfrac{x}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$ **(1точка**).

Тогава за $\Delta ABC\Rightarrow AB.DC=BC.AC\Rightarrow DC=\dfrac{x}{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}$ **(1точка).**

От ΔDOC намираме $\sin\gamma=\dfrac{OC}{DC}=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}$ **(1 точка)**.

Зад.2 **а)** При a=1 решаваме уравнението $2^{2\cos x}-3.2^{\cos x}+2=0$. Полагаме $2^{\cos x}=y$, $y>0$ $\Rightarrow$ трябва да решим уравнението $y^2-3y+2=0$, $y_{1;2}=2;1$ **(1точка)**.

От уравнението $2^{\cos x}=2\Rightarrow\cos x=1\Rightarrow x=2k\pi$, $k\in Z$ от $2^{\cos x}=1\Rightarrow\cos x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+l\pi$, $l\in Z$ **(по 0,5 точки** за всеки от корените**)**.

б) $2^{2\cos x}-3a.2^{\cos x}+2a^2=0$. Полагаме $2^{\cos x}=y$, $y>0$ $\Rightarrow$ трябва да решим уравнението $y^2-3ay+2a^2=0\Rightarrow D=a^2>0$, $y_{1;2}=2a;a$ **(1 точка).** От неравенствата $-1\le\cos x\le1$ $\Rightarrow 2^{-1}\le 2^{\cos x}\le 2$ **(0,5 точки)** $\Rightarrow\dfrac{1}{2}\le a\le 2$ или $\dfrac{1}{2}\le 2a\le 2\Rightarrow a\in\left[\dfrac{1}{4};2\right]$ **(0,5 точки).**

4400 гр. Пазарджик, ул. "П. Яворов" № 1, тел/факс 034 446 270, e-mail: riopz@pasat.bg, http://riopz.com/

в) Полагаме $2^{\cos x}=y$, $y>0 \Rightarrow$ задачата за намиране на най-малка стойност и най-голяма стойност на функцията $f(x)=2^{2\cos x}-3a.2^{\cos x}+2a^2$ се свежда до намиране на тези стойности за функцията $g(y)=y^2-3ay+2a^2$ за $y\in\left[\frac{1}{2};2\right]$. $y'=2y-3a \Rightarrow$ при $y=\frac{3a}{2}$, функцията $g(y)=y^2-3ay+2a^2$ има локален екстремум и той е минимум.

1) Нека $y=\frac{3a}{2}\le\frac{1}{2}$ (т.е. $a\in\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]$), тогава при $y>\frac{3a}{2}$, $g(y)$ е растяща функция и $f_{\min}=g_{\min}(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{3a}{2}+2a^2$, а $f_{\max}=g_{\max}(2)=4-6a+2a^2$ **(1 точка).**

2) Нека $\frac{1}{2}<y=\frac{3a}{2}<2$ (т.е. $a\in\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3}\right)$), тогава при $y>\frac{3a}{2}$, $g(y)$ е растяща функция, а при $y<\frac{3a}{2}$ $g(y)$ е намаляваща функция и $f_{\min}=g_{\min}(\frac{3a}{2})=-\frac{a^2}{4}$, а $f_{\max}=\max\left\{g\left(\frac{1}{2}\right);g(2)\right\}$. $g\left(\frac{1}{2}\right)-g(2)=\frac{18a-15}{4}\Rightarrow a\in\left(\frac{1}{3};\frac{5}{6}\right)\Rightarrow f_{\max}=\max\left\{g\left(\frac{1}{2}\right);g(2)\right\}=g(2)$, а при $a\in\left(\frac{5}{6};\frac{4}{3}\right)$ $\Rightarrow f_{\max}=\max\left\{g\left(\frac{1}{2}\right);g(2)\right\}=g\left(\frac{1}{2}\right)$ и при $a=\frac{5}{6}\Rightarrow f_{\max}=\max\left\{g\left(\frac{1}{2}\right);g(2)\right\}=g(2)=g\left(\frac{1}{2}\right)$ **(1 точка)**.

3) Нека $y=\frac{3a}{2}\ge 2$ (т.е. $a\in\left[\frac{4}{3};+\infty\right)$), тогава при $y<\frac{3a}{2}$, $g(y)$ е намаляваща функция и $f_{\min}=g_{\min}(2)=4-6a+2a^2$, а $f_{\max}=g_{\max}(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}a+2a^2$ **(1 точка).**

<u>Зад.3</u> Да означим катетите $AC=b$ и $BC=a$ и нека $\measuredangle AGB=\varphi$. От $S_{ABG}=\frac{1}{3}S_{ABC}$ **(1 точка)**

$\Rightarrow \frac{1}{3}.\frac{ab}{2}=\frac{1}{2}.\frac{2}{3}m_a.\frac{2}{3}m_b\sin\varphi$ **⇒** $4m_am_b\sin\varphi=3ab$**.** Изразяваме медианите $m_a=\sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}$ **и** $m_b=\sqrt{a^2+\frac{b^2}{4}}$ **(1 точка)**$\Rightarrow$ $\sin^2\varphi=\frac{9a^2b^2}{(4b^2+a^2)(4a^2+b^2)}$ **(0,5 точка).**

Пресмятаме и $\cos^2\varphi=1-\sin^2\varphi=\frac{4(a^4+2a^2b^2+b^4)}{(4b^2+a^2)(4a^2+b^2)}$ **(0,5 точка)**

⇒ $ctg^2\phi=\frac{4(a^4+2a^2b^2+b^4)}{9a^2b^2}$ **(1 точка).** Представяме $ctg^2\varphi=\frac{4}{9}\left(\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}\right)$.

Тъй като $\measuredangle AGB=\varphi>90^o$, то $ctg\varphi<0\Rightarrow ctg^2\varphi$ ще е най-голям, когато изразът $\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}$ е най-малък **(1 точка).** От основно неравенство $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\ge 2$ **(1 точка)** ⇒ че изразът е най-малък при $\frac{a}{b}=1$ **(0,5 точка)** $\Rightarrow ctg^2\varphi=\frac{4}{9}\left(\frac{a^2}{b^2}+2+\frac{b^2}{a^2}\right)=\frac{16}{9}$, а $ctg\varphi=-\frac{4}{3}$ **(0,5 точка)**