Общински кръг на LIX Републиканска олимпиада по математика
28 февруари 2010 година – София

10. клас

1. **Решете неравенството** $\frac{(3x-2)(2|x|+1)}{4x^2-1} \geq x$ **и проверете дали числото** $m=\sqrt{5^{\frac{1}{2}}-4.5^{\frac{1}{4}}+4}$ **е негово решение.** **7 точки**

2. **Дадена е функцията** $f(x)=x^2+2px+13$. **Определете стойностите на параметъра *p*, за които върхът на параболата *y* = *f* (*x*) се намира на разстояние:**

а) не по-голямо от 5 единици от абсцисната ос; **3 точки**

б) не по-малко от 5 единици от началото на координатната система **4 точки**

3. **Намерете стойностите на параметъра *a*, за които уравнението** $\sqrt{x^2-2ax+a}=\sqrt{-8x-8}$ **има решение.** **7 точки**

math-bg.com

УКАЗАНИЯ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

10. клас

1. Решете неравенството $\frac{(3x-2)(2|x|+1)}{4x^2-1} \geq x$ и проверете дали числото $m=\sqrt{5^{\frac{1}{2}}-4.5^{\frac{1}{4}}+4}$ е негово решение. **7 точки**

Намерено: при $x \geq 0$ и $x \neq \frac{1}{2}$ неравенството е еквивалентно на $(x-1)^2(2x-1) \leq 0$ 1 точка

и решенията са $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$ 1 точка

при $x < 0$ и $x \neq -\frac{1}{2}$ неравенството е еквивалентно на $\left(x^2+2x-1\right)(2x+1) \leq 0$

1 точка

и решенията са $x \in \left(-\infty; -1-\sqrt{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ 1 точка

Следователно решенията на неравенството са $x \in \left(-\infty; -1-\sqrt{2}\right] \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \cup \{1\}$

1 точка

$m=\sqrt{\left(5^{\frac{1}{4}}-2\right)^2}=\left|5^{\frac{1}{4}}-2\right|=2-5^{\frac{1}{4}}$ 1 точка

За обосновано $2-5^{\frac{1}{4}} > \frac{1}{2}$, следователно не е решение на неравенството 1 точка.

2. Дадена е функцията $f(x)=x^2+2px+13$. Определете стойностите на параметъра *p*, за които върхът на параболата *y = f (x)* се намира на разстояние:

а) не по-голямо от 5 единици от абсцисната ос; **3 точки**

б) не по-малко от 5 единици от началото на координатната система **4 точки**

а) Намерени координатите на върха $V\ \left(-p; 13-p^2\right)$ 1 точка

Съставена системата $\begin{vmatrix} 13-p^2 \leq 5 \\ 13-p^2 \geq -5 \end{vmatrix}$ 1 точка

Намерени решенията на системата $p \in \left[-3\sqrt{2}; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; 3\sqrt{2}\right]$ 1 точка

б) Намерено разстоянието между точките $O(0; 0)$ и $V\left(-p; 13-p^2\right)$ $OV=\sqrt{p^4-25p^2+169}$

1 точка

Получено неравенството $p^4-25p^2+169 \geq 25$ 1 точка

Намерени решенията на неравенството $p \in (-\infty; -4] \cup [-3; 3] \cup [4; +\infty)$ 2 точки

math-bg.com

3. Намерете стойностите на параметъра *a*, за които уравнението $\sqrt{x^2-2ax+a}=\sqrt{-8x-8}$ има решение. **7 точки**

а) Получено, че уравнението е еквивалентно на системата $\begin{vmatrix} x^2-2(a-4)x+a+8=0 \\ x\le -1 \end{vmatrix}$ 1 точка

За извода, че системата има решение, ако уравнението $x^2-2(a-4)x+a+8=0$ има поне един корен, удовлетворяващ неравенството $x \le -1$ 1 точка

За намерено $D\ge 0 \Leftrightarrow a\in(-\infty;1]\cup[8;+\infty)$ 1 точка

За разгледани:

1 случай: Корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2-2(a-4)x+a+8=0$ удовлетворяват неравенството $x \le -1$, ако a е решение на системата $\begin{vmatrix} D\ge 0 \\ (-1)^2-2(a-4)(-1)+a+8\ge 0 \\ a-4<-1 \end{vmatrix}$

1 точка

т.е. $a\in\left[-\frac{1}{3};1\right]$ 1 точка

2 случай: само един от корените x_1 и x_2 на уравнението удовлетворява неравенството $x \le -1$, ако a е решение на неравенството $(-1)^2-2(a-4)(-1)+a+8<0$ 1 точка

т.е. $a\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$ 1 точка

Краен отговор: $a\in(-\infty;1]$

math-bg.com