МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – гр. ВЕЛИКО ТЪРНОВО
Велико Търново- 5000, ул."В.Левски" 13, тел.(062) 61-63-14, факс (062) 62-80-37, п.к. 152

59-та НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 г.
XI клас

1зад. В уравнението $u^2 - p\left(au - \frac{1}{2}\right) + 3a - 2 = 0$ p е равно на стойността на x, при която числата $\lg 5$, $\frac{1}{2}\lg\left(4^{x+1} - 9\right)$, $\lg\left(2^x + 7\right)$ в този ред образуват аритметична прогресия, а a е реален параметър. Да се изрази чрез a частното: $S = \frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_1 - u_2)^2 + 2}$, където u_1 и u_2 са корените на даденото уравнение

7 точки

2зад. Да се намери лицето на $\triangle ABC$, ако $AC = 3$ см, $BC = 4$ см, а медианите AK и BL са взаимно перпендикулярни.

7 точки

3зад. Да се намери сумата на несъкратимите дроби със знаменател 3, заключени между естествените числа m и n ($m < n$).

7 точки

Време за работа – 4 часа ***Желаем Ви успех!***

math-bg.com

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
РЕГИОНАЛЕН ИНСПЕКТОРАТ ПО ОБРАЗОВАНИЕТО – гр. ВЕЛИКО ТЪРНОВО
Велико Търново- 5000, ул."В.Левски" 13, тел.(062) 61-63-14, факс (062) 62-80-37, п.к. 152

59-та НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЩИНСКИ КРЪГ – 28.02.2010 г.
КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНКА
XI клас

1зад. Получаване на уравнението $\lg 5+\lg\left(2^x+7\right)=\lg\left(4^{x+1}-9\right)$ *1 точка*

Определяне на ДМ $4^{x+1}>9$ *0,5 точки*

Свеждане на уравнението $\lg 5+\lg\left(2^x+7\right)=\lg\left(4^{x+1}-9\right)$ до $5\left(2^x+7\right)=\left(4^{x+1}-9\right)$ *1 точка*

Получаване на уравнението $4.2^{2x}-5.2^x-44=0$ *1 точка*

Намиране на $x=2$ и извод, че удовлетворява неравенството *1,5 точки*

Получаване на уравнението за u: $u^2-2au+3a-1=0$ *0,5 точки*

Записване формулите на Виет: $u_1+u_2=2a$, $u_1.u_2=3a-1$ *0,5 точки*

Заместване в израза за S и опростяването му $S=\dfrac{2a^2-3a+1}{2a^2-6a+3}$ *1 точка*

2зад. Определяне на лицето $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}.AC.BC.\sin\gamma=\dfrac{1}{2}3.4.\sin\gamma=6\sin\gamma$ *1 точка*

Прилагане на косинусова теорема за $\triangle ABC, \triangle AKC$ и $\triangle BLC$:

$AB^2=25-24.\cos\gamma$; $AK^2=13-12.\cos\gamma$; $BL^2=\dfrac{73}{4}-12.\cos\gamma$; *1,5 точки*

Прилагане на Питагорова теорема за $\triangle ABO$:

$AB^2=AO^2+BO^2=\left(\dfrac{2}{3}AK\right)^2+\left(\dfrac{2}{3}BL\right)^2=\dfrac{4}{9}AK^2+\dfrac{4}{9}BL^2$ *1 точка*

$25-24.\cos\gamma=\dfrac{4}{9}\left(13-12.\cos\gamma+\dfrac{73}{4}-12\cos\gamma\right)$ *1 точка*

Намиране на $\cos\gamma=\dfrac{5}{6}$ и $\sin\gamma=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$ *2 точки*

Намиране на $S_{ABC}=6.\sin\gamma=\sqrt{11}$ *0,5 точки*

3зад. Дроб със знаменател 3 е несъкратима, когато числителят ѝ не се дели на 3, т.е. когато е цяло число от вида $3к+1$ или $3к+2$, където $к$ е цяло число. *1 точка*

Търсената сума S може да се представи като сбор на две суми S_1 и S_2:

$S=S_1+S_2=\left[\left(m+\dfrac{1}{3}\right)+\left(m+\dfrac{4}{3}\right)+...+\left(n-\dfrac{2}{3}\right)\right]+\left[\left(m+\dfrac{2}{3}\right)+\left(m+\dfrac{5}{3}\right)+...+\left(n-\dfrac{1}{3}\right)\right]$ *2 точки*

math-bg.com

Всяка от тези суми е аритметична прогресия с разлика 1 и се състои от $n - m$ на брой членове. *2 точки*

$$S = S_1 + S_2 = \frac{2\left(m+\frac{1}{3}\right)+(n-m-1).1}{2}(n-m) + \frac{2\left(m+\frac{2}{3}\right)+(n-m-1).1}{2}(n-m) =$$ *2 точки*

$$= (n-m)\frac{4m+2+2(n-m-1)}{2} = (n-m)(n+m) = n^2 - m^2$$

math-bg.com