1.	В	**11.**	В	**21.**	Б	**31.**	А	**41.**	Б
2.	В	**12.**	25	**22.**	Г	**32.**	1	**42.**	Б
3.	В	**13.**	А	**23.**	Б	**33.**	Г	**43.**	3
4.	Г	**14.**	В	**24.**	В	**34.**	Б	**44.**	Г
5.	А	**15.**	Б	**25.**	Г	**35.**	Б	**45.**	В
6.	18,75	**16.**	15	**26.**	А	**36.**	А	**46.**	В
7.	Г	**17.**	Б	**27.**	0	**37.**	Г	**47.**	А
8.	Г	**18.**	35	**28.**	А	**38.**	45	**48.**	Г
9.	Б	**19.**	В	**29.**	В	**39.**	А	**49.**	А
10.	Б	**20.**	Г	**30.**	А	**40.**	150	**50.**	5

Решения на задачите от областния кръг на Националното състезание – тест

22 март 2009 г.

1. Отг. В). Числото 100^{2009} има $2.2009 = 4018$ нули. Като прибавим и единицата, получаваме общо 4019 цифри.

2. Отг. В). $(x+y)^2 = 49 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 49 \Leftrightarrow x^2 + 2.10 + y^2 = 49 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 29$.

3. Отг. В). Последователните положения на бълхата са: $(0;0) \to (2;0) \to (2;3) \to (1;3)$.

4. Отг. Г). Дадената височина е към страната с дължина $7\,см$, защото в противен случай катет с дължина $9\,см$ би трябвало да участва в правоъгълен триъгълник с хипотенуза $7\,см$, което не е възможно. Следователно лицето на триъгълника е равно на $S = \frac{7.9}{2} = 31,5\ кв.см$.

5. Отг. А). $A = \frac{8.9.10.11.12}{1.2.3.4.5}$ и $B = \frac{6.7.8.9.10.11.12}{1.2.3.4.5.6.7} = \frac{8.9.10.11.12}{1.2.3.4.5}$. Следователно $A = B$.

6. Отг. $18,75\%$. Лицето на триъгълника, образуван от два последователни върха на осмоъгълника и центъра O, е $\frac{1}{8}$ от лицето на осмоъгълника. Отсечката OM е медиана в един такъв триъгълник и следователно разделя лицето му на две равни части. Тогава лицето на защрихованата част е $\frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$ от лицето на осмоъгълника, което е $18,75\%$.

7. Отг. Г). Тъй като $(x+2)(x^2-2x+4) - x^3 + x - 10 = (x^3+8) - x^3 + x - 10 = x - 2$, стойността на израза е $2009 - 2 = 2007$.

8. Отг. Г). Втората бригада е асфалтирала $3,08.1,5 = 4,62\ км$ и дължината на магистралата е $3,08 + 4,62 + 2,5 = 10,2\ км$.

9. Отг. Б). При разкриване на абсолютната стойност използваме, че $2009^{12} > 2009^{10}$. Тогава $-2009^{12} + \left|2009^{10} - 2009^{12}\right| + 2009^{10} = -2009^{12} + 2009^{12} - 2009^{10} + 2009^{10} = 0$.

10. Отг. Б). Времето в София е с 2 часа напред спрямо Лондон, а в Лондон то е с 5 часа напред спрямо Ню Йорк. Затова времето в София е със 7 часа напред спрямо Ню Йорк. Получаваме $14-7=7$ ч.

11. Отг. В). От условието следва, че $\angle EBC=\angle BEC=45^0$, т.е. ΔEBC е равнобедрен и $BC=EC=2\,см$. От друга страна $BC+CD=32:2=16$ *см* и оттук намираме, че $DE=16-(2+2)=12$ *см*. Тогава $CD=14$ *см* и търсеното лице е $14.2=28$ *кв. см*.

12. Отг. 25. Нечетните числа от 1 до 2008 са $2008:2=1004$ на брой, които групираме по двойки: 1 и 2007, 3 и 2005, 5 и 2003, и т.н. Двойките са общо $1004:2=502$. Тъй като $1+2007=3+2005=...=2008$, то търсената сума е $2008.502+2009=1\,010\,025$. Двуцифреното число, на което завършва сумата, е 25.

13. Отг. А). Възможни са два случая: $3-2x=5$ или $3-2x=-5$. В първия случай $3-2x=5 \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$, а във втория $3-2x=-5 \Leftrightarrow -2x=-8 \Leftrightarrow x=4$. Отговорът е 4, защото $4>-1$.

14. Отг. В). От правоъгълните триъгълници A_1AB и B_1BA намираме съответно $\angle ABA_1=70^0$ и $\angle BAB_1=60^0$. Тогава

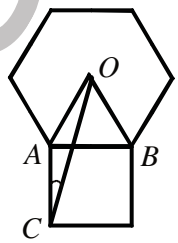
$$\angle ACB=180^0-(\angle ABA_1+\angle BAB_1)=180^0-(70^0+60^0)=180^0-130^0=50^0.$$

15. Отг. Б). За да се дели числото на 2, трябва да се изтрие последната цифра 5. Сборът от цифрите на полученото число е $1+2+7+9+1+2+3+4=29$ и от признака за делимост на 3 заключаваме, че е достатъчно да се изтрие една от двойките в числото 12791234. По-голямото от двете така получени числа е 1791234.

16. Отг. 15^0**.** ΔABO е равностранен и следователно $\angle BAO=60°$. ΔCAO е равнобедрен и

$$\angle CAO=90°+60°=150°.$$

Оттук $\angle ACO=\frac{1}{2}(180^0-150^0)=15°$.



17. Отг. Б). Данните, съобщени от А и В, нямат общи части. Оттук следва, че нито един от тях не е познал точната дата. Същото важи и за данните, съобщени от В и Г. Заключаваме, че Б е познал точната дата. Чрез проверка в условието се установява, че това наистина е така.

18. Отг. 35. Търсеното число не може да е едноцифрено, защото в противен случай би се оказало, че 525 е квадрат на едноцифрено число. Това очевидно не е така. Ясно е, че числото не може да е с повече от 3 цифри. Тъй като $525=3.5^2.7$, единствените двуцифрени и трицифрени делители на 525, които са по-малки от 525, са: 15, 21, 25, 35, 75, 105 и 175. Чрез непосредствена проверка установяваме, че само числото 35 изпълнява условието на задачата.

19. Отг. В). Тъй като $4.8=32$ и $35-32=3$, числото трябва да се записва с точно 3 девятки и 1 осмица. Възможните числа са 9998, 9989, 9899 и 8999, т.е. общо 4 на брой.

20. Отг. Г). От $a=b+5$ следва, че $a-b=5>0$, т.е. винаги $a>b$. Заключаваме, че **А)** не е вярно. От $a+b=c$ следва, че $c-b=a$. Ако $a<0$, то $c<b$ и **В)** е нарушено. Ако $a>0$, то $c>b$ и сега **Б)** не е вярно. Следователно вярното е **Г)**.

21. Отг. Б). Нека x е търсената концентрация (в проценти). В $3\frac{1}{3}$ литра 8% разтвор има $\frac{8}{100}\cdot\frac{10}{3}=\frac{8}{3.10}$ литра чиста киселина. В 10 литра с концентрация $x\%$ има $\frac{x}{100}\cdot 10=\frac{x}{10}$ литра чиста киселина. Новополученият разтвор е $\frac{10}{3}+10=\frac{40}{3}$ литра с концентрация 5% и чистата киселина в него е $\frac{5}{100}\cdot\frac{40}{3}=\frac{20}{3.10}$ литра. Оттук получаваме уравнението $\frac{8}{3.10}+\frac{x}{10}=\frac{20}{3.10}$, което е еквивалентно с $8+3x=20$ и следователно $3x=12$, т.е. $x=4\%$.

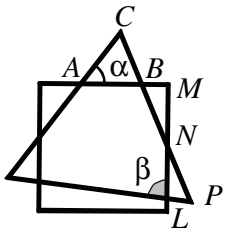
22. Отг. Г). От петте върха поне три са от един цвят. От трите едноцветни върха поне два са съседни върхове на петоъгълника. Тези два върха заедно с кой да е друг връх на петоъгълника образуват равнобедрен триъгълник. Възможни са 3 случая за разположение на третия връх с цвета на двата съседни върха. В два от тях бедрата на равнобедрения триъгълник са страни на петоъгълника, а в третия случай те са диагонали. Тук използваме, че кои да е два диагонала на петоъгълника са равни, защото могат да се разглеждат като съответни елементи в еднакви триъгълници.

23. Отг. Б). Нека броят на числата в първата група е x. Тогава сборът им е $18x$. Броят на числата във втората група е $2x$ и сборът им е $24.2x=48x$. Средноаритметичното на всички числа е $\frac{48x+18x}{3x}=\frac{66x}{3x}=22$.

24. Отг. В). Изразите в **А)** и **Г)** имат отрицателни стойности. От друга страна $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=2^2=4$ и $0,2009^{-1}=\frac{10000}{2009}$, което е по-голямо от 4, защото $\frac{10000}{2500}=4$ и $2009<2500$ (от две дроби с еднакви числители дробта с по-малък знаменател има по-голяма стойност).

25. Отг. Г). Общият брой вкарани голове е $1+3=4$, което е четно число. Това означава, че бройките голове, вкарани от всеки от двата отбора, са с еднаква четност. Заключаваме, че ситуацията в **Г)** е невъзможна, защото разлика 1 се получава единствено когато двете бройки са с различна четност. В допълнение към решението ще отбележим, че ситуацията в **А)** се реализира при резултат 2:2, ситуацията в **Б)** се реализира при резултат 3:1 в полза на "Атлет", а ситуацията във **В)** се реализира при резултат 3:1 в полза на "Борец".

26. Отг. А). Тъй като $\angle ACB=60^0$, то $\angle ABC=180^0-(\alpha+60^0)=50^0$. От друга страна $\angle NBM=\angle ABC=50^0$ (върхни ъгли) и от правоъгълния ΔBNM намираме $\angle BNM=90^0-50^0=40^0$. Следователно $\angle LNP=\angle BNM=40^0$ (върхни ъгли). Най-накрая с помощта на теоремата за външен ъгъл в триъгълника получаваме, че $\beta=\angle LNP+60^0=40^0+60^0=100^0$.



27. Отг. 0. Последователно получаваме $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=(x^2+y^2+xy)+xy=xy$, защото от условието следва, че $x^2+y^2+xy=0$. Тъй като $(x+y)^2\geq 0$, то с помощта на полученото равенство заключаваме, че $xy\geq 0$. От друга страна $x^2+y^2=-xy$, откъдето $xy\leq 0$. Получените неравенства за xy са възможни едновременно само в случая $xy=0$.

Но тогава от условието следва, че $x^2+y^2=0$, което е възможно само ако $x=y=0$. Следователно $2x+3y=0$.

28. Отг. А). Нека t е времето в часове на пътуване на колата до момента на изпреварването. Тогава $t+2$ е времето на велосипедиста до момента на изпреварването. Изравняваме пътищата: $20(t+2)=80t$ и намираме $t=\frac{2}{3}$ ч, което е равно на 40 минути. Следователно $11\text{ч} + 40\text{мин} = 11\text{ч } 40\text{мин}$.

29. Отг. В). Броят на всички кубчета е $100.100.100=1\ 000\ 000$, а броят на тези, които участват в кулата, е $1\ 000\ 000:4=250\ 000$. Тогава височината на кулата е равна на:

$$250\ 000\ см = 2500\ м = 2{,}5\ км.$$

30. Отг. А). За сбора на ъглите в ΔAXB имаме:

$$\angle XAB+\angle XBA+\angle AXB=\frac{\angle BAC}{2}+\frac{\angle ABC}{2}+\left(\frac{\angle ACB}{2}+\frac{\angle ACB}{2}+45^0\right)=180^0.$$

Тъй като $\frac{\angle BAC}{2}+\frac{\angle ABC}{2}+\frac{\angle ACB}{2}=90^0$, то $\frac{\angle ACB}{2}+45^0=90^0$, откъдето $\angle ACB=90^0$.

31. Отг. А).

$$3\frac{7}{11}\cdot 4\frac{4}{11}+4\frac{6}{11}\cdot 5\frac{5}{11}+6\frac{4}{11}\cdot 7\frac{7}{11}=\left(4-\frac{4}{11}\right)\left(4+\frac{4}{11}\right)+\left(5-\frac{5}{11}\right)\left(5+\frac{5}{11}\right)+\left(7-\frac{7}{11}\right)\left(7+\frac{7}{11}\right)=$$

$$=16-\frac{16}{121}+25-\frac{25}{121}+49-\frac{49}{121}=90-\frac{90}{121}=89\frac{31}{121}.$$

32. Отг. 1. Първото число n^3+4n+2 е просто при $n=1$ (стойността на израза е 7). Второто число n^3+4n+3 е просто при $n=2$ (стойността на израза е 19). Третото число n^3+4n+4 е просто при $n=3$ (стойността на израза е 43). Числото n^3+4n+5 е съставно за всяко n, защото $n^3+4n+5=(n+1)(n^2-n+5)$.

33. Отг. Г). Твърдение **Г)** е винаги вярно, защото в противен случай ще бъде нарушено условието на задачата (когато Георги пее, Иван винаги си запушва ушите).

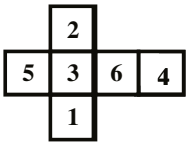
34. Отг. Б). До първия мъж трябва да са съпругите на другите двама и те могат да седнат по два различни начина. Когато тези две съпруги седнат, за останалите (двамата мъже и едната жена) има една единствена възможност.

35. Отг. Б). Общо 3 триъгълника: ΔABM, ΔABN и ΔABQ. За първия от тях $AB=BM$ като хипотенузи в еднакви правоъгълни триъгълници с катети 2 и 4. За втория от тях $AN=BN$ като хипотенузи в еднакви правоъгълни триъгълници с катети 1 и 3. За третия триъгълник $AB=AQ$ като хипотенузи в еднакви правоъгълни триъгълници с катети 2 и 4.

36. Отг. А). Нека планираната дневна норма на шофьора е x курса. Тогава месечният му план е $20x$ курса. През м. февруари шофьорът е извършвал по $(x+3)$ курса на ден в продължение на 18 дни и е направил общо $18(x+3)$ курса. Тогава $18(x+3)=20x+24$, откъдето $x=15$. Получаваме, че месечният план е $15.20=300$ курса, който е преизпълнен с $\frac{24}{300}\cdot 100=8\%$. Следователно твърдение **А)** не е вярно. Твърдение **Б)** е вярно, защото $\frac{3}{15}\cdot 100=20\%$. Вярно е и твърдение **В)**, защото $300+24=324$ курса.

Най-накрая е вярно и твърдение **Г**), защото за планираната дневна норма получихме 15 курса.

37. Отг. Г). Стените на зарчето са квадрати и следователно числото върху всяка стена участва като събираемо в четири сбора, които се съпоставят на четирите върха на квадрата. Тъй като $1+2+3+4+5+6=21$, то сборът на числата, които се съпоставят на осемте върха на зарчето, е $21.4=84$. Ако най-малкото съпоставено число е поне 11, то сборът на осемте съпоставени числа е поне $11.8=88$. Но $88>84$ и следователно това е невъзможно. Да разгледаме случая, когато най-малкото съпоставено число е 10. Числото 10 може да се представи точно по 3 начина като сбор на 3 числа измежду 1, 2, 3, 4, 5 и 6: $1+3+6=10$, $1+4+5=10$ и $2+3+5=10$. Това означава, че най-много за 3 върха на зарчето числата, които им се съпоставят, са равни на 10. За останалите 5 върха числата са равни поне на 11. Но $3.10+5.11=85>84$ и следователно този случай е също невъзможен. Заключаваме, че възможно най-голямата стойност на най-малкото число, което се съпоставя на връх, е по-малка от 10. Показаният пример е реализация за 9.



38. Отг. 45. По условие 16 ученици са взели най-малко по два бонбона. Това означава, че в тази бройка са учениците, взели точно по два бонбона, както и учениците, взели точно по три бонбона. Заключаваме, че взелите точно по два бонбона са $16-3=13$ на брой. По условие 26 ученици са взели най-малко по един бонбон. Това означава, че в тази бройка са учениците, взели точно по един бонбон, учениците, взели точно по два бонбона, както и учениците, взели точно по три бонбона. Заключаваме, че взелите точно по един бонбон са $26-16=10$ на брой. Следователно общият брой на консумираните бонбони е $3.3+13.2+10.1=45$.

39. Отг. А). Тъй като ΔABC е равнобедрен, ъглополовящата CP лежи на симетралата на страната AB. Следователно точките X и O лежат на правата CP. От $OA=OC$ следва, че ΔAOC е равнобедрен и $\angle OAC=\angle ACO=\frac{1}{2}\angle ACB=54^0$. В равнобедрения ΔABC имаме $\angle BAC=\frac{1}{2}\left(180^0-108^0\right)=36^0$. Тогава $\angle XAC=\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}.36^0=18^0$. Получаваме, че $\angle OAX=\angle OAC-\angle XAC=54^0-18^0=36^0$.

40. Отг. 150. Даденото равенство записваме във вида $m(3m^2-2n)=7$. Оттук заключаваме, че m е делител на 7. Следователно за m са възможни следните случаи: $m=1$, $m=7$, $m=-1$ и $m=-7$. Ако $m=1$, то $n=-2$. Ако $m=7$, то $n=73$. Ако $m=-1$, то $n=5$. Ако $m=-7$, то $n=74$. Сборът от възможните стойности на n е $-2+73+5+74=150$.

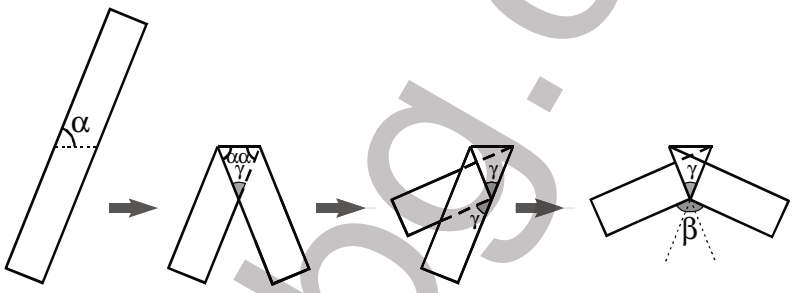
41. Отг. Б). Числото 2009 изпълнява условието на задачата и сборът от цифрите му е равен на 11.

42. Отг. Б). Борис и Владо твърдят еднакви неща. От условието следва, че те или казват истината, или лъжат. Същото важи за Асен и Георги – те или казват истината, или лъжат. Ако Асен и Георги лъжат, то тогава всеки от тях е счупил стъклото. Но това противоречи на условието, че един от четиримата е направил белята. Следователно Асен и Георги казват истината. Заключаваме, че стъклото е счупено от Борис или от Владо, като и двамата лъжат. Това е изпълнено само в случай, че Борис е направил белята, което е и отговорът на задачата.

43. Отг. 3. Квадратите на нечетните числа завършват на 1, 5 или 9. Следователно четвъртите степени на нечетните числа завършват само на 1 или 5. Тъй като никое от числата A и B не се дели на 5, заключаваме, че A^4 и B^4 завършват на 1. Следователно последната цифра на числото $2A^4+B^4$ е равна на $2.1+1=3$.

44. Отг. Г). Тъй като $\triangle ABM$ е равнобедрен ($AB=AM=\frac{1}{2}AC$), то $\angle ABM=45^0$. Оттук следва, че $\angle ABC>45^0$ и заключаваме, че **А)** е вярно. Освен това AL е ъглополовяща, откъдето $\angle BAL=45^0$. Следователно $\angle ABM+\angle BAL=90^0$, което означава, че $AL\perp BM$, т.е. **Б)** също е вярно. Вярно е и **В)**, защото от теоремата за външен ъгъл в триъгълника имаме, че $\angle BMC=\angle BAM+\angle ABM=90^0+45^0=135^0$. Не е вярно **Г)**. В противен случай ще излезе, че $AB=\frac{1}{2}BC$ (катет срещу ъгъл от 30^0) и тъй като $AB=\frac{1}{2}AC$, бихме заключили, че $AC=BC$, което не е възможно.

45. Отг. В). От чертежа се вижда, че $\beta=3\gamma=3(180^0-2\alpha)=3(180^0-140^0)=120^0$.

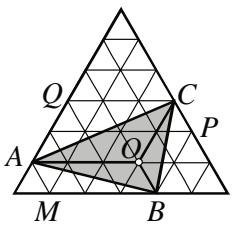


46. Отг. В). Най-малка стойност на разликата ще се получи, ако $a=d+1$, $b=0$ и $e=9$. Тогава възможно най-малката стойност за c остава $c=1$, а за f – съответно $f=8$. Това означава, че разликата е най-малко 3. Тази разлика се реализира например в случая $\overline{abc}=301$ и $\overline{def}=298$.

47. Отг. А). Ясно е, че едното число е трицифрено, а второто е двуцифрено. Ако a и b са съответно цифрата на десетиците и цифрата на единиците на двуцифреното число, от условието следва, че $100a+10b+4+10a+b=301$, т.е. $110a+11b=297$. Полученото равенство е еквивалентно с $11(10a+b)=11.27$, откъдето $10a+b=27$. Единствената възможност е $a=2$ и $b=7$. Следователно двете числа са 274 и 27, а сумата от цифрите на десетиците им е $7+2=9$.

48. Отг. Г). Изразите, които разглеждаме, имат вида 1*2*3*4*5*6*7*8*9*10, където всяка звездичка отговаря на "+" или на "·". Ако някоя звездичка, след първата, отговаря на "+", то заменяйки този "+" с "·", ще увеличим израза. Това е така, защото $xy>x+y$, ако числата x и y са по-големи от 2 (следва от неравенството $(x-1)(y-1)\geq 1\Leftrightarrow xy\geq x+y$, като равенство има само при $x=y=2$). Следователно изразът ще получи най-голяма стойност или когато всички звездички съответстват на умножения, или когато само първата звездичка съответства на събиране. В първия случай ще получим стойност $2.3.4.5.6.7.8.9.10$, а във втория случай стойността е $2.3.4.5.6.7.8.9.10+1$. Следователно $N=2.3.4.5.6.7.8.9.10+1$, откъдето заключаваме, че от посочените твърдения само **Г)** е вярно.

49. Отг. А).



$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{AOC} = \frac{1}{2}\left(S_{AOBM} + S_{BOCP} + S_{AOCQ}\right) = \quad = \frac{1}{2}(6+4+12) = 11, \text{ т.е.}$$

$$S_{ABC} = 11\,\text{cm}^2.$$

50. Отг. 5. Сумата на записаните числа е между $4.18 = 72$ и $5.18 = 90$. Единственото кратно на 17 между тези две числа е 85. Ако заменим всички записани четворки с петици, ще получим 90, защото $5.18 = 90$. Но $90 - 85 = 5$, откъдето следва, че заменените четворки са точно 5 на брой (всяка замяна увеличава сумата с 1).