ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА

Конкурсен изпит – тест по математика

Вариант 2 (14 юли 2009 г.)

1. Корените на уравнението $\sqrt{x-2} = x-2$ са:

а) $x = 2$; б) $x = 2$ и $x = 3$; в) $x = 3$; г) няма решения .

2. Решенията на неравенството $x+1 \geq \dfrac{1}{x+1}$ са:

а) $x \in [-2,-1) \cup [0,+\infty)$; б) $x \in [-2,-1)$; в) $x \in [0,+\infty)$; г) $x \in (-1,0]$.

3. Броят n на членовете на геометрична прогресия с първи член $a_1 = 2$, частно $q = -3$ и последен член $a_n = -54$ е:

а) 2 ; б) 3 ; в) 4 ; г) 5 .

4. Стойността на израза $\log_2 8^{\sqrt{5}} - \sqrt{5}\lg 100 + 3\log_{\sqrt{5}} 1 - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(-\sqrt{5}\right)^2$ е равна на:

а) 0 ; б) 5 ; в) $\sqrt{5}$; г) 1 .

5. Ако $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$ и $\alpha \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, то стойността на $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ е равна на:

а) $3\sqrt{13}/13$; б) $2\sqrt{13}/13$; в) $-3\sqrt{13}/13$; г) $4\sqrt{13}/13$.

6. В равнобедрен триъгълник с основа 1 *cm* и бедро 2 *cm* дължината на ъглополовящата към бедрото е:

а) 1 *cm* ; б) 2 *cm* ; в) $\sqrt{10}/3$ *cm* ; г) 1,5 *cm* .

7. Квадрат със страна 3 *cm* е вписан в окръжност с радиус R равен на:

а) 1 *cm* ; б) $3\sqrt{2}/2$ *cm* ; в) 2 *cm* ; г) 1,5 *cm* .

8. В трапец $ABCD\ (AB \parallel CD)$, $AD = 3$ *cm* и $CD = 2$ *cm*. Ъглополовящата на $\measuredangle BAD$ пресича бедрото BC в точка M и правата CD в точка P. Ако $BM : MC = 3:1$, то основата AB има дължина:

а) 3 *cm* ; б) 4 *cm* ; в) 2 *cm* ; г) 5 *cm* .

9. Лицето на триъгълник ABC е $7\sqrt{3}$ cm^2. Мерките на ъглите на триъгълника при върховете A, B и C, в този ред, образуват аритметична прогресия. Ъглополовящите на триъгълника се пресичат в точка O и $BO = 2\sqrt{3}$ *cm*. Дължината на страната AC е равна на:

а) 2 *cm* ; б) 3 *cm* ; в) 4 *cm* ; г) 5 *cm* .

10. В триъгълна пирамида $ABCD$ основата е равнобедрен триъгълник ABC с бедра $AC = BC = 5$ *cm* и страна $AB = 8$ *cm*. Околният ръб CD е перпендикулярен на равнината на основата, а стената ABD сключва с основата на пирамидата ъгъл с големина 45°. Радиусът на описаната около пирамидата сфера е:

а) $\sqrt{89}/3$ *cm* ; б) 4 *cm* ; в) $\sqrt{101}/3$ *cm* ; г) $\sqrt{706}/6$ *cm* .

11. Да се намерят всички решения на уравнението $\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$.

12. Да се реши неравенството $\sqrt{x+2} \geq x$.

13. Нека x_1 и x_2 са корените на уравнението $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$, където a е реален параметър. Да се запише изразът $x_1^3 + x_2^3$ като функция на параметъра a и да се определи най – малката стойност на тази функция при $-1 \leq a \leq 0$.

14. В триъгълник ABC точка M е среда на страната AB и медианата CM се пресича от ъглополовящата през върха A в точка K. Известно е, че $\measuredangle BAC = 105^\circ$ и $\dfrac{CK}{KM} = \sqrt{2}$. Да се намери отношението $\dfrac{R}{r}$, където R и r са радиусите съответно на описаната и на вписаната за триъгълника ABC окръжности.

15. Да се намери обемът на правилна четириъгълна пирамида с дължина на основния ръб 1 *cm*, ако ъгълът между две съседни околни стени е два пъти по – голям от ъгъла между околен ръб и основата.

math-bg.com

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА

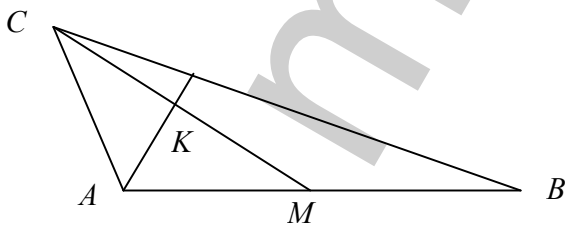
ОТГОВОРИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ
КОНКУРСЕН ИЗПИТ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
14 юли **2009** година
Вариант 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
б	**а**	**в**	**б**	**а**	**в**	**б**	**а**	**в**	**г**

11. Уравнението има смисъл при $x>0$. Полагаме $\lg x = t$ и получаваме квадратното уравнение $t^2-t-2=0$, чиито корени са -1 и 2. Решението на уравнението $\lg x=-1$ е $x=1/10$, а от $\lg x=2$ получаваме $x=100$. Така изходното уравнение има две решения $x=1/10$ и $x=100$.

12. Неравенството има смисъл при $x \geq -2$. То е изпълнено при $-2 \leq x < 0$, тъй като тогава дясната му страна е отрицателна величина и е винаги по – малка от (аритметичната) стойност на квадратен корен. При $x \geq 0$ неравенството е еквивалентно на $x+2 \geq x^2$ или на $x^2-x-2 \leq 0$. Решенията му при $x \geq 0$ са $x \in [0,2]$. Окончателно, решенията на изходното неравенство са $x \in [-2,2]$.

13. От формулите на Виет за връзката между корените на квадратното уравнение и неговите коефициенти получаваме $x_1+x_2=2a$ и $x_1x_2=a+2$. За да използваме последните равенства преобразуваме израза $x_1^3+x_2^3$: $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]$. След заместване на x_1+x_2 и x_1x_2 с техните стойности изразени чрез параметъра a и последващо преобразуване на израза намираме, че $x_1^3+x_2^3=8a^3-6a^2-12a=f(a)$. Производната на функцията $f(a)$ е квадратната функция $f'(a)=24a^2-12a-12$, като последната приема положителни стойности за $x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right) \cup (1,+\infty)$ и отрицателни стойности при $x \in \left(-\frac{1}{2},1\right)$. Следователно $f(a)$ е растяща функция при $a \in \left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ и намаляваща функция при $a \in \left[-\frac{1}{2},0\right]$. Това означава, че $f(a)$ има единствен локален екстремум в интервала $[-1,0]$ и той е локален максимум за тази функция. От последното заключаваме, че най – малката стойност на $f(a)$, при $a \in [-1,0]$, е по – малката от стойностите на функцията в крайните точки на интервала, т. е. $\underset{a\in[-1,0]}{Min}\, f(a)=\min\{f(-1),f(0)\}=f(-1)=-2.$

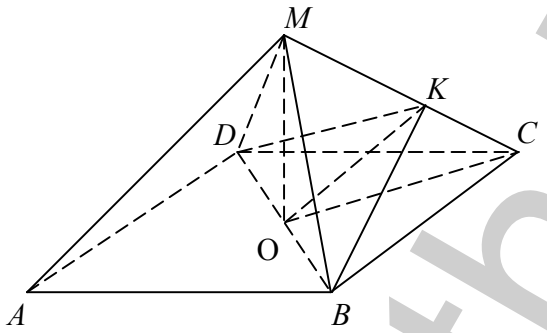


14. Използваме стандартни означения за триъгълника ABC. По – специално $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$, $p=(a+b+c)/2$, $\measuredangle BAC=\alpha$, $\measuredangle CBA=\beta$ и $\measuredangle ACB=\gamma$. От свойството на ъглополовящата AK в триъгълник AMC можем да запишем, че $\frac{CA}{AM}=\frac{CK}{KM}$. Тъй като по условие е известно, че $\frac{CK}{KM}=\sqrt{2}$ получаваме $\frac{CA}{AM}=\sqrt{2}$, откъдето намираме $\frac{2b}{c}=\sqrt{2}$ (понеже от условието имаме, че точка M е среда на страната AB и следователно

math-bg.com

$AM = \frac{c}{2}$). Сега използваме синусовата теорема за триъгълника ABC и записваме $b = 2R.\sin\beta$ и $c = 2R.\sin\gamma$. Така равенството $\frac{2b}{c} = \sqrt{2}$ добива вида $2\sin\beta = \sqrt{2}\sin\gamma$ и оттук $\sqrt{2}\sin\beta = \sin(75^\circ - \beta)$, тъй като $\alpha = 105^\circ$ и следователно $\beta + \gamma = 75^\circ$, т. е. $\gamma = 75^\circ - \beta$. Преобразуваме последователно така полученото тригонометрично уравнение за β : $\sqrt{2}\sin\beta = \sin(75^\circ - \beta) \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\beta = \sin 75^\circ \cos\beta - \cos 75^\circ \sin\beta \Leftrightarrow \sqrt{2} = \sin 75^\circ \cot g\beta - \cos 75^\circ \Leftrightarrow \cot g\beta = \frac{\sqrt{2} + \cos 75^\circ}{\sin 75^\circ}$. Пресмятаме $\sin 75^\circ = \sin\left(45^\circ + 30^\circ\right) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 45^\circ = \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right)/4$ и $\cos 75^\circ = \cos\left(45^\circ + 30^\circ\right) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)/4$. Така намираме, че $\cot g\beta = \sqrt{3}$, откъдето определяме $\beta = 30^\circ$ и следователно $\gamma = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$. От известни формули за лицето S на триъгълника ABC записваме $S = pr = \left(ac\sin\beta\right)/2$. Оттук, тъй като (от синусовата теорема за нашия триъгълник) имаме, че $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R.\sin\beta$ и $c = 2R.\sin\gamma$, получаваме $\frac{R}{r} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin 105^\circ + \sin 30^\circ + \sin 45^\circ}{2\sin 105^\circ \sin 30^\circ \sin 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} + \sin 105^\circ + \sin 45^\circ}{\sin 105^\circ \sin 45^\circ} = \frac{\frac{1}{2} + 2\sin 75^\circ \cos 30^\circ}{\frac{1}{2}\left(\cos 60^\circ - \cos 150^\circ\right)} = \sqrt{6} + \sqrt{3} - 1$.

15. Нека правилната четириъгълна пирамида е с основа квадратът $ABCD$, а върхът на пирамидата е точка M. Точката O, която е центъра на квадрата $ABCD$, е ортогоналната проекция на върха на пирамидата върху нейната основа. Околните стени BCM и CDM са еднакви равнобедрени триъгълници и следователно ортогоналните проекции на върховете B и D върху правата MC са една и съща точка K. Ъгълът между околните стени BCM и CDM е точно $\measuredangle BKD = 2\measuredangle BKO$ (триъгълник BKD е равнобедрен и KO е медиана и ъглополовяща в него). Нека φ е ъгъла между околен ръб и основата на пирамидата. От условието имаме, че $\measuredangle BKO = \measuredangle KCO = \varphi$. Височината $H = OM$ на пирамидата определяме от триъгълник OCM: $H = OC.tg\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.tg\varphi$. Така за обема V на пирамидата



намираме $V = S_{ABCD}.H/3 = \frac{\sqrt{2}}{6}.tg\varphi$. За определяне (на тригонометрична функция) на φ разглеждаме правоъгълните триъгълници OKB и OKC, в които $\measuredangle BOK = \measuredangle OKC = 90°$ и $\measuredangle OKB = \measuredangle KCO = \varphi$. Имаме $\frac{OB}{OK} = tg\varphi$ и $\frac{OK}{OC} = \sin\varphi$, откъдето (след елиминиране на общата им страна OK) намираме $\frac{OB}{OC} = tg\varphi.\sin\varphi \Leftrightarrow tg\varphi.\sin\varphi = 1$, тъй като $OB = OC = \frac{\sqrt{2}}{2}\,cm$. Последното равенство е еквивалентно на следното уравнение за $\cos\varphi$: $\cos^2\varphi + \cos\varphi - 1 = 0$, откъдето определяме $\cos\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ (да отбележим, че $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и следователно $\cos\varphi > 0$). Сега пресмятаме $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{2}$, след което определяме и $tg\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\sqrt{2\sqrt{5} - 2}}{\sqrt{5} - 1}$. Окончателно, за обема на пирамидата получаваме $V = \frac{\sqrt{2}}{6}.tg\varphi = \frac{\sqrt{\sqrt{5} + 1}}{6}\,cm^3$.

math-bg.com

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ – ВАРНА

КОНКУРСЕН ИЗПИТ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
14 юли 2009 г.

Вариант 2
Оценяване на кандидатстудентските писмени работи по математика

Задача 11 (6 точки)	Определени са допустимите стойности и е записано квадратно уравнение на нова променлива, с която е означена функцията $\lg x$ – **2 т.**
	Решено е полученото квадратно уравнение – **2 т.**
	Намерени са решенията на уравнението – **2 т.**
Задача 12 (6 точки)	Определени са стойностите на x, при които радикалът има смисъл и е разгледан случаят на отрицателна стойност на другата страна на неравенството – **2 т.**
	Елиминиран е радикалът – **1 т.**
	Решено е полученото квадратно неравенство – **2 т.**
	Определени са решенията на изходното неравенство – **1 т.**
Задача 13 (6 точки)	Записани са формулите на Виет за даденото уравнение – **1 т.**
	Получена е стойността на израза $x_1^3 + x_2^3$ като функция на параметъра a – **2 т.**
	Определена е производната на тази функция на a – **1 т.**
	Определени са интервалите на монотонност на функцията – **1 т.**
	Намерен е абсолютният екстремум на функцията в посочения интервал – **1 т.**
Задача 14 (6 точки)	Приложено е свойството на ъглополовящата в $\triangle AMC$ и е получена връзка между страните b и c на $\triangle ABC$ – **1 т.**
	Определени са тригонометрични функции на ъгли на триъгълника, които са необходими за намиране на отношението – **2 т.**
	Намерена е връзка между радиусите R и r – **2 т.**
	Намерено е търсеното отношение – **1 т.**
Задача 15 (6 точки)	Изразена е височината на пирамидата чрез тригонометрична функция на някой от основните ъгли на пирамидата – **1 т.**
	Получено е тригонометрично уравнение за този основен ъгъл – **2 т.**
	Решено е тригонометричното уравнение – **2 т.**
	Намерен е обемът на пирамидата – **1 т.**

math-bg.com