



ЗАДАЧИ И ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ – ТЕМА 2

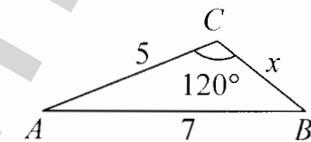
Задача 1. Нека $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ е геометрична прогресия, за която $b_1 + b_2 + b_3 = 7$ и $b_2 + b_3 + b_4 = 14$. Да се намери сумата на първите шест члена на прогресията.

Решение: Нека b_1 и q са първият член и частното на прогресията. От $b_1 + b_2 + b_3 = 7$ и $b_2 + b_3 + b_4 = 14$ получаваме $b_1(1+q+q^2) = 7$ и $b_1(q+q^2+q^3) = b_1q(1+q+q^2) = 14$. Тогава $q = 2$ и $b_1 = 1$. Оттук $S_6 = b_1 \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 1 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = 63$.

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страни $AC = 5$, $AB = 7$ и $\angle ACB = 120^\circ$. Да се намери лицето на триъгълника.

Решение: Нека $BC = x$. Тогава $7^2 = 5^2 + x^2 - 2 \cdot 5 \cdot x \cdot \cos 120^\circ$ или

$$x^2 + 5x - 24 = 0. \text{ Оттук намираме } x_1 = 3, x_2 = -8, \text{ откъдето } BC = 3 \text{ и } S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 3 \cdot \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$



Задача 3. Да се реши уравнението $x + \sqrt{x} - 2 = 0$.

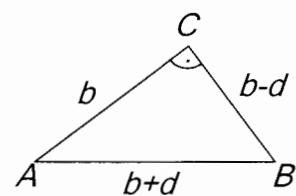
Решение: Записваме уравнението във вида $\sqrt{x} = 2 - x$. Дефиниционната област е $x \geq 0$. При $x \leq 2$ повдигаме на квадрат и получаваме $x = (2 - x)^2$ или $x^2 - 5x + 4 = 0$. Оттук $x_1 = 1, x_2 = 4 > 2$. Следователно $x = 1$.

Задача 4. Дълчините на страните на правоъгълен триъгълник образуват аритметична прогресия. Да се намери дължината на хипотенузата му, ако лицето на триъгълника е 24.

Решение: Нека $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ и $a^2 + b^2 = c^2$, $a < b$. Тогава

$$a = b - d, c = b + d, \text{ откъдето } (b - d)^2 + b^2 = (b + d)^2, \text{ или } b^2 = 4bd. \text{ Тогава}$$

$$d = \frac{1}{4}b, a = \frac{3}{4}b \text{ и } S = \frac{1}{2}ab = \frac{3}{8}b^2 = 24. \text{ Оттук } b = 8, c = b + d = \frac{5}{4}b = 10.$$



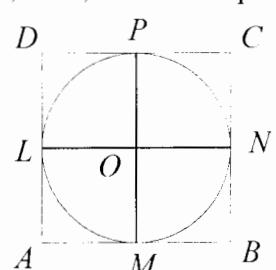
Задача 5. Да се реши уравнението $\frac{\cos(x - \frac{\pi}{3})}{\cos(x + \frac{\pi}{3})} + \frac{\cos(x + \frac{\pi}{3})}{\cos(x - \frac{\pi}{3})} = 2$.

Решение: Множеството от допустимите стойности е $x \neq \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$. Уравнението е еквивалентно на $\cos^2(x - \frac{\pi}{3}) + \cos^2(x + \frac{\pi}{3}) = 2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) \cos(x + \frac{\pi}{3})$, или $[\cos(x - \frac{\pi}{3}) - \cos(x + \frac{\pi}{3})]^2 = 0$, т.e.

$$2 \sin x \sin \frac{\pi}{3} = 0, \text{ откъдето } x = m\pi, (m \in \mathbb{Z}).$$

Задача 6. В четириъгълника $ABCD$ е вписана окръжност k с радиус 2, която се допира до AD , AB и BC съответно в точки L , M и N . Да се намери лицето на $ABCD$, ако е известно, че L , M и N са средите на AD , AB и BC .

Решение: Нека O е центърът на k и k се допира до DC в точка P . Тъй като $AL = AM$, $DL = DP$, $AL = LD$ и $AM = MB$, то $DP = AM = MB$ и $AB = AD$. Аналогично $AB = BC$, $MB = CP$, откъдето $AB = BC = CD = DA$, т.e. $ABCD$ е ромб. Тъй като OL , OM , ON и OP са симетриали на страните, то $ABCD$ е вписан в окръжност и следователно $ABCD$ е квадрат със страна 4 и лицето му е 16.



Задача 7. Дадена е правилна четириъгълна пирамида с основен ръб 4 и височина 2. Да се намери мярката на ъгъла между две съседни околни стени.

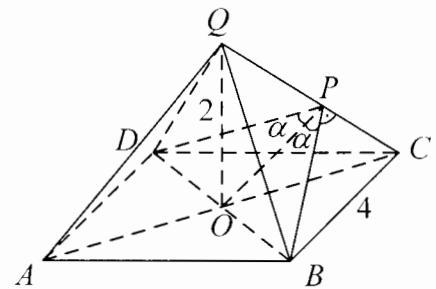
Решение: Нека $BP \perp CQ$. Понеже $\triangle BCQ \cong \triangle DCQ$, то $DP \perp CQ$, откъдето $(DBP) \perp CQ$. Следователно $\angle [BCQ, DCQ] = \angle BPD = 2\alpha$. Но $BP = DP$ и $BO = OD$, така че $\angle BPO = \alpha$. От правоъгълника BPO получаваме $\tan \alpha = \frac{BO}{PO} = \frac{2}{2} = 1$, т.e. $\alpha = 45^\circ$.

гълния $\angle COQ$ имаме $CQ^2 = OC^2 + OQ^2 = 8 + 4 = 12$, т.e.

$CQ = 2\sqrt{3}$. Тъй като $OP \perp CQ$, то $OP \cdot CQ = OQ \cdot OC$, откъдето

$$OP = \frac{OC \cdot OQ}{CQ} = \frac{4}{\sqrt{6}}. \text{ От правоъгълния } \triangle OPB \text{ намираме}$$

$$\tan \alpha = \frac{OB}{OP} = \sqrt{3}, \text{ откъдето } \alpha = 60^\circ \text{ и } \angle [BCQ], \angle DCQ] = 120^\circ.$$



Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a , за които уравнението $x^2 + ax - \log_2(3 \cdot 2^{a^2} - 2) = 0$ има реални корени x_1 и x_2 , такива че $x_1 < a < x_2$.

Решение: Тъй като $3 \cdot 2^{a^2} - 2 \geq 1$, то $\log_2(3 \cdot 2^{a^2} - 2)$ е определен. Ако $f(x) = x^2 + ax - \log_2(3 \cdot 2^{a^2} - 2)$, то $x_1 < a < x_2$, точно когато $f(a) = 2a^2 - \log_2(3 \cdot 2^{a^2} - 2) < 0$. Оттук имаме $2a^2 < \log_2(3 \cdot 2^{a^2} - 2)$ или $2^{2a^2} < 3 \cdot 2^{a^2} - 2$. Полагаме $y = 2^{a^2}$ и получаваме неравенството $y^2 - 3y + 2 < 0$, откъдето $y \in (1; 2)$, т.e. $1 < 2^{a^2} < 2$ или $0 < a^2 < 1$. Оттук $a \in (-1; 0) \cup (0; 1)$.

Задача 9. Даден е триъгълник ABC със страни $AB = 2\sqrt{3}$, $BC = 3$ и $CA = \sqrt{3}$. Върху страните AB , BC и CA са взети съответно точките M , N и P , така че $AM = BN = CP = x$. Да се намери стойността на x , при която лицето на триъгълника MNP е най-малко.

Решение: Тъй като $AB^2 = AC^2 + BC^2$, то ABC е правоъгълен триъгълник с $\angle CAB = 60^\circ$ и $\angle CBA = 30^\circ$. Нека $S = S_{ABC}$, $S_1 = S_{AMP}$,

$$S_2 = S_{BMN}, S_3 = S_{ACP} \text{ и } S^* = S_{MNP}. \text{ Тогава } S^* = S - (S_1 + S_2 + S_3).$$

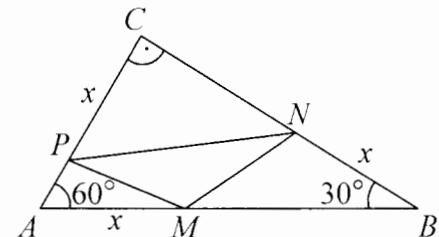
Следователно S^* ще бъде най-малко, когато $S' = S_1 + S_2 + S_3$ е

$$\text{най-голямо. Имаме: } S_1 = \frac{1}{2} AM \cdot AP \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{4} x (\sqrt{3} - x),$$

$$S_2 = \frac{1}{2} BN \cdot BM \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{4} x (2\sqrt{3} - x) \text{ и } S_3 = \frac{1}{2} CP \cdot CN \cdot \sin 90^\circ = \frac{1}{2} x (3 - x). \text{ Оттук}$$

$$S' = \frac{\sqrt{3}}{4} [-(1 + \sqrt{3})x^2 + (2 + 3\sqrt{3})x]. \text{ Квадратната функция } f(x) = -(1 + \sqrt{3})x^2 + (2 + 3\sqrt{3})x, \text{ дефини-}$$

рана в $(0, \sqrt{3})$ има най-голяма стойност за $x_0 = \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})}$. Тъй като $x_0 \in (0, \sqrt{3})$, то лицето на триъгълника MNP е най-малко при $x = x_0$.



Задача 10. Дадена е функцията $f(x) = x^2 + ax + b$, където a и b са реални числа. Да се намери най-малката стойност на $f(x)$, ако $f(x) \geq ax^2 + bx + 1 \geq bx^2 + x + a$ за всяко реално число x .

Решение: От условието получаваме неравенствата $(1-a)x^2 + (a-b)x - (1-b) \geq 0$,

$(a-b)x^2 - (1-b)x + 1 - a \geq 0$ и $(1-b)x^2 - (1-a)x - (a-b) \geq 0$. Ако някой от коефициентите пред x^2 е отрицателен, неравенствата няма да са изпълнени за всяко x . Следователно $1-a \geq 0$, $a-b \geq 0$ и $1-b \geq 0$. Ако $1-a > 0$, трябва $D_1 = (a-b)^2 + 4(1-a)(1-b) \leq 0$, което е изпълнено, когато $1-b \leq 0$.

Но $1-b \geq 0$, откъдето $b=1$. Като заместим $b=1$ в D_1 получаваме $(a-1)^2 \leq 0$, което противоречи на $1-a > 0$. Следователно $a=1$. Като заместим $a=1$ в $(a-b)x^2 - (1-b)x + 1 - a \geq 0$, получаваме $(1-b)x^2 - (1-b)x = (1-b)x(x-1) \geq 0$. Последното неравенство е изпълнено за всяко x , само когато $b=1$. Следователно $a=b=1$.

При $a=b=1$ неравенствата от условието са изпълнени, т.e. $f(x) = x^2 + x + 1$. Тогава най-малката стойност на $f(x)$ е $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

Пълното решение на всяка задача се оценява с 4 точки. Оценката се получава по формулата $2 + 0,1N$, където N е броят на получените точки.