Софийски Университет "Св. Климент Охридски"

Писмен конкурсен изпит по математика, 9 юли 2009г.

ТЕМА 1

Задача 1. Да се реши уравнението

$$(x^2 - 6x + 5)\sqrt{x-4} = 0\,.$$

Задача 2. Даден е триъгълник ABC със страна $AC = 3$, радиус на описаната окръжност $R = \frac{7}{\sqrt{3}}$, и $\sphericalangle CAB = 60^o$. Да се намерят дължините на страните AB и BC.

Задача 3. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ е аритметична прогресия, за която $a_1 + a_2 + a_3 = 1$ и $a_2 + a_3 + a_4 = 4$. Да се намери сумата на първите 18 члена на прогресията.

Задача 4. Даден е ромб $ABCD$ със страна $AB = 4$ и $\sphericalangle BAD = 60^o$. Вписаната в ромба окръжност се допира до страните AB, BC, CD, DA съответно в точките M, N, P и Q. Да се намери лицето на четириъгълника $MNPQ$.

Задача 5. Да се реши неравенството

$$\log_2 x + 2\log_x 2 < 3\,.$$

Задача 6. Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{l} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 3.2^x - 2^{y+2} = 4\,. \end{array}\right.$$

Задача 7. Нека T е точка от страната AB на триъгълника ABC. Да се намерят дължините на страните AC и BC, ако $AT = 2$, $BT = 4$, $CT = 5$, и окръжностите вписани в триъгълниците ACT и BCT се допират помежду си.

Задача 8. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които неравенството

$$2\sin 2x - \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x + a + 2 < 0$$

е изпълнено за всяко $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$.

Задача 9. Нека $ABCD$ е триъгълна пирамида с ръбове $AB = AC = DA = DB = DC = 1$. През върха A, перпендикулярно на стената BCD и успоредно на ръба BC, е прекарана равнина λ. Нека λ пресича ръбовете DB и DC съответно в точки M и N, и отношението на обемите на пирамидите $MNDA$ и $BCDA$ е

$$\frac{V_{MNDA}}{V_{BCDA}} = \frac{16}{25}.$$

Да се намери обемът на пирамидата $ABCD$.

Задача 10. Нека $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, където a, b и c са реални числа, и

$$|f(x)| \le 2(1 - x^2) \quad \text{за всяко} \quad x \in [-1, 1].$$

Да се намери възможно най-голямата стойност на $|f'(x)|$ в интервала $[-1, 1]$.

Време за работа - 5 часа

Драги кандидат-студенти,

- *номерирайте всички страници на беловата си;*
- *решението на всяка задача трябва да започва на нова страница;*
- *черновата не се проверява и не се оценява.*

Изпитната комисия ви пожелава успешна работа!

math-bg.com